

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática



**“MODELADO DE LOS PROCESOS DE TOMA DE
DECISIÓN EN ENTORNOS SOCIALES MEDIANTE
OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA”**

Tesis que presenta el Ingeniero

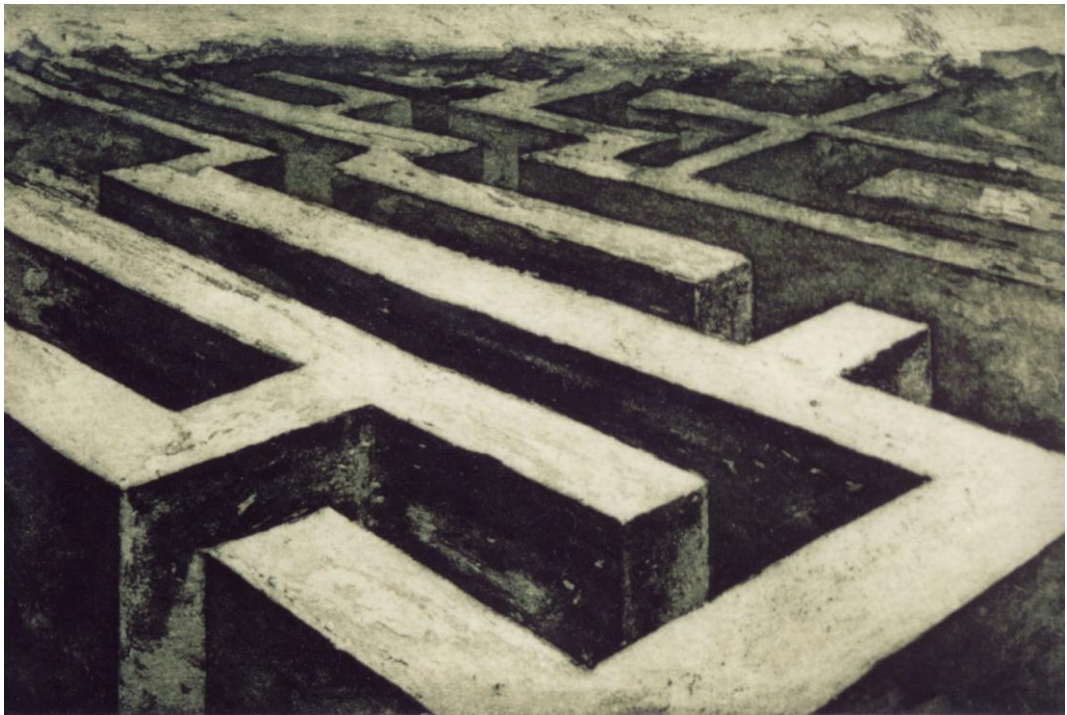
Jesús María Doña Fernández

Para optar al título de

DOCTOR

Málaga – España

Abril – 2008



*...en el laberinto de la Lógica,
sólo la Imaginación conoce el camino...*

A María José

La memoria titulada “MODELADO DE LOS PROCESOS DE TOMA DE DECISIÓN EN ENTORNOS SOCIALES MEDIANTE OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA” que presenta D. Jesús María Doña Fernández para optar al grado de doctor, ha sido elaborada en el departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación de la Universidad de Málaga, bajo la dirección del Doctor D. José Ignacio Peláez Sánchez.

Málaga, Abril 2008

El Doctorando

El Director

Fdo. Jesús María Doña Fernández

Fdo. Dr. José Ignacio Peláez Sánchez

Agradecimientos

La realización de esta tesis doctoral comprende un largo camino que siempre he realizado junto a mi tutor, pero ante todo amigo José Ignacio, es por ello que quiero agradecerle a él en primer lugar su amistad y compañía en este viaje que aquí concluye y abre nuevos horizontes.

También quiero agradecer a todos mis amigos y compañeros que siempre han estado a mi lado, especialmente a David, Javier, José y Cristina que con su sincera amistad siempre han sabido alentarme en los momentos difíciles y estar cuando los he necesitado.

Sin duda alguna, tampoco quiero olvidar a Jesús, Emilio, Paco, Rubén, Ángel, José Miguel, Alberto y José Luis, por tantas horas compartidas de trabajo en las que me ayudaron a crecer no sólo como profesional, sino también como persona.

Gracias por hacerme sonreír en los malos momentos, por soportarme todos los días de la semana y, sobre todo, por vuestra amistad.

Por su puesto, a toda mi familia, por todo lo que me ha dado y a la que debo todo lo que hoy soy. Especialmente a Carmelo, mi padre, que me mostró la entrada al laberinto de la lógica. Y a Isabel, mi madre, que me enseñó cómo la imaginación puede encontrar la salida.

Y por último y con especial significado, a María José, mi mujer, por estar siempre a mi lado, por todo lo que hemos compartido, por creer siempre en mí y hacerme feliz con sólo una sonrisa.

A todos ellos, a los que no he podido nombrar pero también estuvieron, a los que pasaron de forma fugaz y a los que vendrán para participar en mi vida, a todos: Muchas Gracias.

Málaga, Abril de 2008

Índice

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	21
I.1 Operadores de Agregación en TDG	26
I.1.1. Ordered weighted averaging. Operadores OWA.....	27
I.1.2 Familias de Operadores de Agregación.....	36
I.1.2.1 ME-OWA	36
I.1.2.2 S-OWA	37
I.1.2.3 Step-Owa	41
I.1.2.4 Window-Owa.....	43

I.1.2.5 Neat-OWA	45
I.2 Problemas de Agregación en la Toma de Decisión en Grupo	50
I.2.1 Semántica en la Toma de Decisión	51
I.2.2 Operador IOWA.....	54
I.2.3 Operador IOWA Modificado	58
I.3 Objetivos y Estructura de la Memoria	60
CAPÍTULO 2 OPERADORES DE MAYORÍA	63
II.1 operadores de Mayoría neat-OWA	64
II.1.1 Definición formal	68
II.1.2 Propiedades.....	71
II.2 Generalización de los Operadores de Mayoría.....	75
II.2.1 Operador de Importancia OWA (IM-OWA).	76
II.2.2 Operador de Mayoría no neat (NMA-OWA).....	78
II.2.3 Operador de Mayoría Ponderado (WMA-OWA)	80
II.2.4 Operador de Mayoría Agregada (AM-OWA).....	82
II.3 Operador de Mayoría Geométrico	85

II.3.1 Operador OWG (Ordered Weighted Geometric)	86
II.3.2 Operador de Mayoría Geométrico.....	87
II.4 Cuantificación de los Operadores de Mayoría.....	93
II.4.1 Estrategias de Cuantificación	96
II.4.1.1 Cuantificación Individual	96
II.4.1.2 Cuantificación en Grupo	97
II.4.2 Normalización Cuantificada: Q -Normalización.....	98
II.4.3 Operadores de Mayoría Cuantificada QMA-OWA.....	101
II.4.3.1. Operador QMA-OWA Individual	102
II.4.3.2 Operador QMA-OWA Grupo	107
CAPÍTULO 3 PROCESOS DE DECISIÓN.....	111
III.1 Preferencia Lingüística en los Procesos de Toma de Decisión en Grupo	114
III.1.1 Etiquetas Lingüísticas. Semántica y Propiedades	115
III.1.2 Axiomas de Agregación de Preferencias	118
III.1.2.1 Axiomas de agregación de preferencias en entornos borrosos.....	119
III.2 Operador Lingüístico de Mayoría.....	120

III.2.1 Propiedades del Operador Lingüístico	122
III.2.2 Axiomas del Operador Lingüístico de Mayoría	124
III.3 El Método Directo aplicado a los Grupos de Decisión con Valoraciones Lingüísticas	128
III.3.1 Enfoques de Agregación en el Modelo Directo.....	129
III.3.1.1 Distancias dependientes del valor de preferencia.	130
III.3.1.2 Distancias independientes del valor de preferencia	131
III.3.2 Proceso de Dominio	134
III.3.3 Proceso de Dominio Estricto	136
III.3.4 Proceso no Dominante.....	138
III.3.5 Proceso Secuencial	139
III.4 Ejemplos	140
III.4.1 Proceso de Dominio	142
III.4.2 Proceso de Dominio Estricto	143
III.4.3 Proceso Secuencial	146
III.4.4 Proceso de Dominio con Agregación Independiente	147
III.4.5 Proceso de Dominio Estricto con Agregación Independiente	149

III.4.6 Proceso No Dominante con Agregación Independiente	151
CAPÍTULO 4 APLICACIONES	155
IV.1 Valoración Estratégica de Empresas	156
IV.1.1 Descripción del modelo de valoración de empresas propuesto	157
IV.1.2 Solución al Problema.....	159
IV.1.3 Conclusiones	167
IV.2 Imputación de datos.....	167
IV.2.1 Métodos de Imputación	169
IV.2.1.1 Tipología de los elementos perdidos y sin respuesta	169
IV.2.1.2 Procedimientos de Imputación.....	171
IV.2.2 Imputación de Mayoría.....	176
IV.2.2.1 Ejemplo de Aplicación.....	178
IV.2.2.2 Análisis de los resultados.....	180
IV.2.3 Conclusiones	181
IV.3 Tratamiento de Imágenes	181
IV.3.1 Tipos de Ruidos y Filtros en Imágenes Digitales	183

IV.3.1.1 Tipos de Ruidos.....	183
IV.3.1.2 Tipos de Filtros.....	185
IV.3.2 Aplicación del Operador de Mayoría OWA al Filtrado de Imágenes Digitales	187
IV.3.2.1 Ejemplo visual: Fotografía en Blanco y Negro	189
IV.3.2.2 Análisis de los resultados	192
IV.3.3 Conclusiones	195
CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS.....	197
REFERENCIAS	201

Figuras

Figura 1.1. Ejemplo de cuantificadores lingüísticos.....	29
Figura 1.2. Cuantificadores para todo, existe e identidad.....	30
Figura 1.3. Cuantificador del tipo <i>or</i> para el operador S-OWA.	38
Figura 1.4. Cuantificador del tipo <i>and</i> para el operador S-OWA.....	40
Figura 1.5. Cuantificador del tipo escalón o step.....	42
Figura 1.6. Cuantificador del tipo window.	45
Figura 1.7. Definición del cuantificador lingüístico <i>muchos</i>	53
Figura 2.1. Representación del proceso de agregación de mayoría.	67

Figura 2.2. Representación gráfica del corte del cuantificador con la semántica de cuantificación individual.	97
Figura 2.3. Representación gráfica del corte del cuantificador con la semántica de cuantificación en grupo.....	98
Figura 2.4. Representación gráfica de los pesos w_i resultantes de aplicar el operador de agregación.....	99
Figura 2.5. Representación gráfica de los pesos w_i tras aplicar los cuantificadores.	100
Figura 2.6. Representación gráfica de los pesos w_i^Q normalizados.	100
Figura 2.7. Representación gráfica de las soluciones obtenidas.....	106
Figura 2.8. Representación gráfica de las soluciones obtenidas.....	110
Figura 3.1. Representación gráfica de un conjunto de etiquetas trapezoidales. .	116
Figura 4.1. Patrones de Pérdida de Datos Univariados.	169
Figura 4.2. Patrón con parámetros no identificados Multivariado.	170
Figura 4.3. Representación de los procesos de agregación tradicionales, de Mayoría y Mayoría Borrosa.....	178
Figura 4.4. Captura de parte de los registros correspondientes al patrón de pérdida univariado aleatorio.	179

Figura 4.5. Representación de los valores para una de las columnas a imputar.	180
Figura 4.6. Aplicación de ruido de Gauss alto y filtros aplicados.	189
Figura 4.7. Aplicación de ruido de Poisson alto y filtros aplicados.....	190
Figura 4.8. Aplicación de ruido de Sal y Pimienta alto y filtros aplicados.....	191
Figura 4.9. Aplicación de ruido Granular alto y filtros aplicados.....	191
Figura 4.10. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruidos alto, medio y bajo gauss.....	192
Figura 4.11. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruidos alto, medio y bajo de sal y pimienta.	193
Figura 4.12. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruido poisson.....	193
Figura 4.13. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruidos alto, medio y bajo granular.	194
Figura 4.14. Comparativa de los promedios de aplicar los operadores de convolución a todos los tipos de ruido alto, medio y bajo respectivamente.....	195

Capítulo 1 Introducción

El impresionante desarrollo que en los últimos años están experimentando las tecnologías de la información ha provocado tal efecto en el conjunto de la sociedad que algunos expertos no dudan ya en compararlo con el descubrimiento de la rueda o la máquina de vapor. Este apogeo de las nuevas tecnologías ya es conocido como la revolución de las comunicaciones.

Esta nueva era está provocando una globalización mundial de los problemas sociales, económicos, políticos, etcétera, con el consiguiente aumento en la complejidad de los mismos. Esta complejidad exige nuevos métodos de toma de decisión que sean capaces de adaptarse a las nuevas situaciones sin complicar aún más dichos procesos. Además, deben permitir visualizar los problemas en un marco organizado y coherente, ayudar a pensar en los elementos de un problema de forma sencilla, ser utilizados por personal sin alta cualificación, estar basados en la sabiduría y sentido común, y por supuesto, ser justificables. Esta situación

ha provocado que la toma de decisión emerja como una disciplina que atrae el interés de investigadores de áreas tan diversas como las ciencias sociales, económicas, computación, etcétera.

La dificultad que entrañan los procesos de toma de decisión queda reflejada con magnífica sencillez en la introducción realizada por en el Premio Nóbel de Economía de 1998 Amartya Sen durante su discurso de investidura:

“Se puede decir que un camello es un caballo diseñado por un comité. Éste parece ser un ejemplo revelador de las terribles deficiencias de las decisiones tomadas por las juntas o comisiones, pero en realidad es una acusación demasiado benévola. Puede que un camello no sea tan rápido como un caballo, pero es, de todas formas, un animal muy útil y armonioso, bien adaptado a viajar largas distancias sin comida ni agua. Al diseñar un caballo, un comité que trate de acomodar los diversos deseos de sus miembros podría muy bien terminar con algo mucho menos coherente: quizás un centauro de la mitología griega, mitad caballo y mitad otra cosa, una creación volátil que combine lo salvaje y lo confuso”.

En este preámbulo, su autor pone de manifiesto la dificultad de diseñar y llevar a cabo sistemas de toma de decisión que sean capaces de producir una solución real a un problema real. Además a lo largo de su discurso planteaba, entre otras, las siguientes cuestiones:

“...¿cómo puede ser posible elaborar, a nivel agregado, evaluaciones coherentes de la sociedad, dada la diversidad de

preferencias, preocupaciones y predicamentos de los distintos individuos dentro de la sociedad?. ¿Cómo podemos encontrar una base racional para realizar tales evaluaciones a nivel agregado, evaluaciones como “la sociedad prefiere esto a aquello”, o “la sociedad debería elegir esto y no aquello”, o “esto es socialmente correcto”?... ¿Cuándo conduce una decisión por mayoría a elecciones coherentes y no ambiguas? ¿Cómo podemos juzgar qué tan bien se comporta una sociedad en su conjunto dados los distintos intereses de sus diversos miembros?...”

No es fácil dar respuesta a todas estas preguntas, de por sí, su autor no puede más que plantearlas, justificando en su discurso toda su carrera profesional en la búsqueda de una solución a las mismas.

Como podemos ver, el estudio de los desafíos de las decisiones sociales que involucran intereses y preocupaciones divergentes es materia de estudio e interés en la actualidad. Pero además, es un problema que ha levantado interés y preocupado desde el comienzo de las civilizaciones. Por ejemplo, Aristóteles en Grecia o Kautilya en la India antigua en el siglo IV antes de Cristo, exploraron varias posibilidades constructivas de elección social en sus libros titulados, respectivamente, Política y Economía.

No obstante, la teoría de elección no se llegará a desarrollar como disciplina sistematizada hasta la Revolución Francesa. Los pioneros de este ámbito de estudio serán los matemáticos franceses del final del siglo XVIII tales como J. C. Borda (1781) y el Marqués de Condorcet (1785), los cuales comenzaron a tratar estos problemas en términos matemáticos dando inicio a la disciplina formal de la elección social en términos de votación y de procedimientos aledaños. El clima

intelectual de este periodo estará muy influenciado por la Ilustración Europea, que se interesaba en la construcción razonada del orden social. De hecho, algunos de los primeros teóricos de la elección social, sobre todo Condorcet, figuraron entre los líderes intelectuales de la Revolución Francesa.

Las motivaciones de los primeros teóricos de la elección social incluían evitar tanto la inestabilidad como la arbitrariedad de los esquemas de decisión. Era la ambición de sus trabajos enfocarse en el desarrollo de un marco para las decisiones racionales y democráticas de un grupo, prestando la debida atención a los intereses y preferencias de todos sus miembros.

Gran parte de este trabajo continuó en Europa a lo largo del siglo XIX. De hecho, personas muy creativas trabajaron en esta área y lucharon con los problemas de la decisión, incluyendo a Lewis Carroll, el autor de Alicia en el país de las maravillas (bajo su verdadero nombre, C. L. Dodgson).

Cuando el problema de la elección social fue revivido en siglo XX por Arrow (1951), él también se centró en las dificultades que plantean las decisiones de grupo y las inconsistencias a las que pueden llevar. Si bien Arrow situó la disciplina de la elección social dentro de un marco estructurado y axiomático, conduciendo así al nacimiento de la teoría de la elección social y toma de decisión en su encarnación moderna.

En la actualidad, todas estas cuestiones se encuadran dentro de disciplinas tan dispares, en un principio, como son la sociología o las ciencias de la computación, marco este último en el que se desarrollan los sistemas de apoyo a la decisión y en el que se encuadra el presente trabajo.

Dentro de la toma de decisión se han desarrollado diferentes esquemas que intentan dar respuesta al problema de la toma de decisión social, como son, entre otros: los grafos de preferencias, el proceso analítico jerárquico, métodos de fusión, toma de decisión lingüística, etcétera, teniendo como nexo común todos ellos el uso de operadores de agregación ya sea en una o en varias de sus fases de desarrollo.

La familia de operadores de agregación más extendida en la actualidad son los operadores OWA (Ordered Weighted Averaging). Tanto por su importancia, así como por la influencia de estos operadores en todos los procesos de toma de decisión, se desarrollan continuamente multitud de trabajos de investigación en el área de las ciencias de la computación con el objetivo de aportar nuevos elementos que sirvan como mecanismos útiles a los sistemas de apoyo a la decisión y que introduzcan mejoras desde un punto de vista social a los resultados que se obtienen.

Al estudio de las herramientas de agregación usadas por los sistemas de apoyo a la decisión está dedicada la presente memoria. De modo muy general, se pretende: primero analizar los operadores de agregación más usados en los sistemas de apoyo a la decisión, delimitar los problemas que subyacen en los mismos y proponer soluciones a éstos.

En las siguientes secciones se desarrollaran los siguientes puntos: primera sección, se da una visión general de los operadores de agregación; en la segunda sección, se muestran los problemas de estos operadores presentan desde un punto de vista social y que serán objeto de estudio en los siguientes capítulos; y finalmente, en la tercera sección, se muestran los objetivos y estructura de la memoria.

I.1 OPERADORES DE AGREGACIÓN EN TDG

Los procesos de agregación de información surgen en multitud de aplicaciones relacionadas con el desarrollo de sistemas inteligentes. Podemos encontrar agregaciones en redes neuronales, controladores basados en lógica borrosa, sistemas de visión, sistemas expertos, toma de decisión multicriterio... En Yager (1988) se introduce una nueva técnica de agregación basada en un promedio de pesos ordenados (OWA), que en pocos años se convierte en una de las familias de operadores más usada en la actualidad. De esta forma, Yager muestra su utilidad en sus trabajos (Yager 1988, 1991, 1992, 1998a, 1998b) aplicándolos respectivamente en problemas de toma de decisión, bases de datos, modelado de redes, sistemas borrosos y fusión de información entre otros.

Así mismo, es fácil encontrar trabajos que exponen la importancia de estos operadores: en (Kacprzyk, 1990) se usan en sistemas de aprendizaje; O'Hagan (1988) los propone como una herramienta eficaz para los sistemas expertos; Yager & Filev (1992) demuestran su utilidad para modelar controladores lógicos difusos; Marimin et al. (1998) los aplica a la toma de decisión en grupo borrosa; Mitchell & Shaefer (1999) los usan en clasificación multi-atributo para la compresión predictiva de imágenes; Llamazares (2007) los aplica a problemas de elección social; y así, un largo etcétera.

La ventaja que los operadores OWA presentan radica principalmente en que ofrecen una agregación que se encuentra situada entre los operadores lógicos *or* y *and*, además aportan una definición general que engloba a los operadores de agregación más comunes, dando gran flexibilidad a la hora de elegir el tipo de reglas de agregación a usar en cada modelo de problema. A continuación se presentan brevemente, los conceptos y características básicas de estos operadores.

I.1.1. Ordered weighted averaging. Operadores OWA.

Un operador OWA se define como una función de dimensión n del tipo $F: R^n \rightarrow R$ a la que se le asocia un vector W de longitud n $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ donde

1. $w_i \in [0,1]$

2. $\sum_{i=1}^n w_i = 1.$

Además, se cumple que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j$ donde b_j es el j -ésimo valor mayor de las a_n .

Ejemplo. Supongamos $W = [0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]^T$

$$\text{Entonces } f(0.5, 1, 0.2, 0.4) = (0.4)(1) + (0.3)(0.5) + (0.2)(0.4) + (0.1)(0.2) = 0.65$$

Un aspecto fundamental de estos operadores es el reordenamiento de los elementos. Esto provoca que los elementos a agregar a_i no estén asociados con un peso w_i , mientras que un peso w_i sí estará asociado con una posición ordenada en la agregación.

Cuando consideramos los pesos como un vector columna, hay que notar que los pesos con menor índice se situaran en la zona alta del vector mientras que los pesos con los índices mayores estarán en la parte baja

Hay que observar cómo los distintos tipos de operadores OWA se pueden clasificar según su función de ponderación. En (Yager, 1988) se destacan tres casos de especial relevancia en la agregación OWA:

1. F^* . En este caso $W = W^* = [1, 0, \dots, 0]^T$
2. F_* . En este caso $W = W_* = [0, 0, \dots, 1]^T$
3. F_{ave} . En este caso $W = W_{ave} = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right]^T$

De donde es fácil deducir que

1. $F^*(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{Max}(a_i)$
2. $F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{Min}(a_i)$
3. $F_{ave}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i$

El vector de pesos W se calcula, normalmente, haciendo uso de los cuantificadores lingüísticos. En este caso, un cuantificador se define como una función $Q: [0,1] \rightarrow [0,1]$ donde $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$ y $Q(x) \geq Q(y)$ con $x > y$.

Zadeh (Zadeh, 1983) define la función Q como sigue:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

con $a, b, x \in [0, 1]$.

En la figura I.1 se muestran tres ejemplos de cuantificadores lingüísticos típicos, donde los parámetros (a, b) son $(0.3, 0.8)$, $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$ respectivamente.

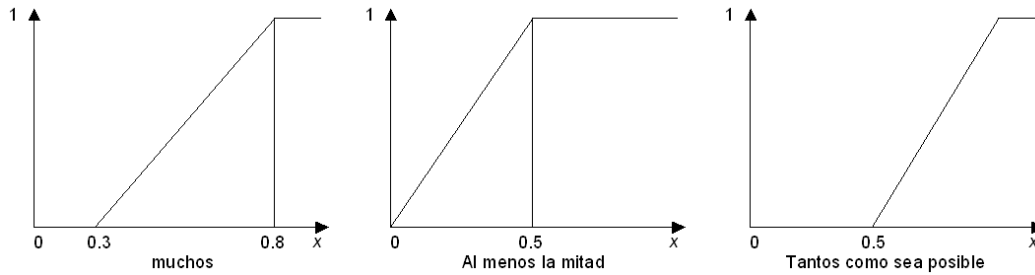


Figura 1.1. Ejemplo de cuantificadores lingüísticos.

Para un valor $x \in [0,1]$, $Q(x)$ representa el grado con que x satisface el concepto borroso representado por el cuantificador. Basado en esta función Q , el vector de pesos OWA se determina como sigue:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

Estos pesos tienen la función de incrementar o disminuir la importancia de los diferentes componentes de la agregación de acuerdo con la semántica asociada con el operador desde Q , es decir, el cuantificador determina la estrategia de

construcción del vector de pesos para conseguir una representación del concepto de mayoría borroso en la agregación de los argumentos (Kacprzyk ,1986).

Para los casos definidos F^* , F_* y F_{ave} , los cuantificadores usados para establecer los vectores de pesos W correspondientes son los mostrados en la figura I.2.

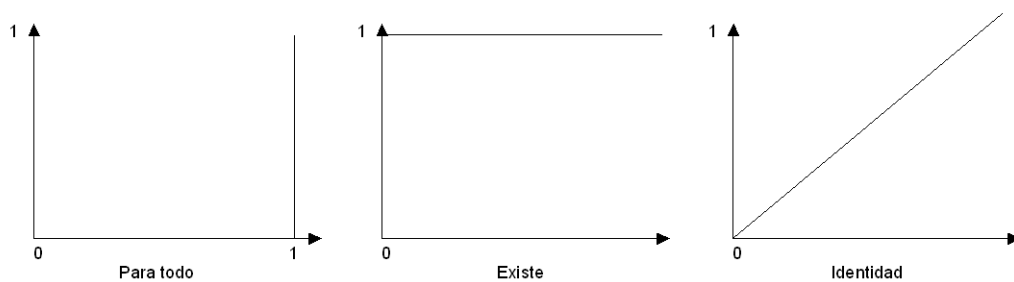


Figura 1.2. Cuantificadores para todo, existe e identidad.

A los operadores OWA se les asocian una serie de importantes propiedades (Yager, 1988). A continuación mostramos las más relevantes para este estudio.

Propiedad 1. Para todo operador OWA F

$$F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Lo que indica que los operadores OWA súper y sub estrella representan los límites superior e inferior respectivamente para cualquier operador OWA definido. De lo que se deduce fácilmente que para cualquier F

$$\text{Min}(a_i) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_i)$$

Propiedad 2 (Commutatividad). Sea $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ un conjunto de elementos a agregar y sea $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ una permutación del mismo. Para cualquier operador OWA definido se cumple que

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Propiedad 3 (Monotonía). Sea a_i y c_i conjuntos a agregar, con $i = 1, \dots, n$ tal que para cada i , $c_i \leq a_i$. Entonces

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Propiedad 4 (Idempotencia). Si $a_i = a$ para todo $i=1, \dots, n$; entonces

$$F(a, a, \dots, a) = a$$

De todo lo anterior se comprueba cómo los operadores OWA satisfacen las propiedades básicas asociadas a los operadores de agregación.

Además, Yager define dos medidas de importancia asociadas a los operadores OWA. La primera de ellas se denomina dispersión (o entropía) de un vector de pesos y se define como:

$$Disp(W) = -\sum_{i=1}^n w_i \cdot \ln(w_i)$$

Cuando se usa un operador OWA para calcular un promedio, $Disp(W)$ nos aporta una medida del grado con el que estamos agregando todos los elementos de igual forma.

Una segunda medida introducida por Yager en la denominada *orness*, definida como:

$$orness(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) \cdot w_i)$$

De donde es fácil comprobar cómo:

- i. $orness(W^*) = 1$
- ii. $orness(W_*) = 0$
- iii. $orness(W_{ave}) = 0.5$

De esta forma se puede definir una medida de *andness* como: $andness(W) = 1 - orness(W)$

Generalmente se aprecia cómo un operador OWA que tiene la mayoría de sus pesos cercanos al extremo superior del vector será un operador del tipo *or* ($orness(W) \geq 0.5$), mientras que por el otro lado, cuando los pesos no nulos se sitúan en la zona inferior del vector columna, el operador será del tipo *and* ($orness(W) \leq 0.5$)

Los siguientes teoremas muestran formalmente estas características:

Teorema. Sean W y W' dos vectores de dimensión n tales que

- i. $w_i = w_i', i \neq j \text{ o } k,$

ii. $w_j = w_j' + \Delta,$

iii. $w_k = w_k - \Delta$

con $\Delta > 0, j > k,$ entonces se cumple que $orness(W) > orness(W')$

Demostración.

$$orness(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) \cdot w_i = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (n-i) \cdot w_i + (n-j)\Delta - (n-k)\Delta \right),$$

$$orness(W) = orness(W') + \frac{1}{n-1} \Delta(k-j).$$

Y como $k > j,$ entonces $orness(W) > orness(W').$

Este teorema muestra cómo, conforme se sube en el vector de pesos aumenta el *orness* del operador, disminuyéndose en el caso contrario. De este teorema se puede deducir el concepto de operador dual.

Definición. Si F es un operador con pesos w_i el dual de F , denotado como \hat{F} , representa una agregación de igual dimensión con pesos $\hat{w}_i = w_{n-i+1}$.

Se comprueba que si F y \hat{F} son duales, entonces

i. $Disp(\hat{F}) = Disp(F)$

ii. $orness(\hat{F}) = orness(F)$

por lo que si F es del tipo *or* su dual será del tipo *and*.

Así mismo, se puede definir una medida de bondad como una nueva clase de operador.

Definición. Sea F un operador de agregación de dimensión n y pesos w_i . F representará una medida de bondad si los pesos satisfacen la condición adicional: $w_i \geq w_j$ con $i < j$.

Además se denominará extensiva a la medida de bondad si la condición se hace estricta $w_i > w_j$ para todo $i < j$.

Los siguientes teoremas exponen una propiedad importante de las medidas de bondad, al mostrar a las medidas de bondad como un subtipo de operadores OWA del tipo *or*.

Teorema. Si F es una medida de bondad, entonces $orness(F) \geq 0.5$.

Demostración. Partimos de la definición original de *orness* a la que se le suma y resta el valor $\frac{1}{2}$.

$$orness(W) = \frac{1}{2} + \sum_i \frac{n-i}{n-1} w_i - \frac{1}{2}$$

Como se cumple la propiedad inicial $\sum_i w_i = 1$, de la misma forma $\frac{1}{2} \sum_i w_i = \frac{1}{2}$,

por lo que sustituyendo en la segunda ocurrencia de $\frac{1}{2}$ se obtiene

$$orness(W) = \frac{1}{2} + \sum_i \frac{n-i}{n-1} w_i - \sum_i \frac{1}{2} w_i = \frac{1}{2} + \sum_i \left(\frac{n-i}{n-1} - \frac{1}{2} \right) w_i = \frac{1}{2} + \sum_i q_i w_i$$

En el caso de que n es par, para $i = a$, donde $m \geq a$ y $i = n+1-a$, se obtiene

$$q_a = \frac{n-2a+1}{2(n-1)}$$

y

$$q_{n+1-a} = \frac{n-2(n+1-a)+2a+1}{(n-1)} = -q_a$$

por lo que

$$orness(F) = \frac{1}{2} + \sum_{a=1}^m q_a (w_a - w_{n+1-a}) \text{ y como } q_a = \frac{n-2a+1}{2(n-1)} \geq \frac{2m-2m+1}{2(n-1)} \geq 0 \text{ bajo}$$

las condiciones iniciales $w_i > w_j$ si $i < j$, entonces

$$\sum_{a=1}^m q_a (w_a - w_{n+1-a}) \geq 0 \text{ por lo que } orness(F) \geq \frac{1}{2}$$

Para el caso de n impar ($n = 2m+1$)

$$orness(F) = \frac{1}{2} + \sum_{a=1}^m q_a (w_a - w_{n+1-a}) + q_{m+1} w_{m+1}$$

Pero como $q_{m+1} = \frac{2m+1-2(m+1)+1}{2(n-1)} = 0$ se continúa conservando que

$$orness(F) \geq \frac{1}{2}.$$

I.1.2 Familias de Operadores de Agregación

Una de las principales ventajas de los operadores OWA es la gran flexibilidad que aportan a los esquemas de decisión al permitir modelar una gran cantidad de reglas de agregación. No obstante, esta ventaja añade una dificultad, y es cómo realizar la elección apropiada del cálculo de los pesos para la aplicación en la que se desea aplicar (Amin, 2007). En esta sección se van a mostrar diferentes técnicas para obtener los pesos asociados a un operador OWA, de forma que se definirán las distintas familias de operadores de agregación.

I.1.2.1 ME-OWA

La primera familia de operadores OWA parametrizados fueron definidos por O'Hagan (1997, 1998). Esta familia de operadores se denominó ME-OWA, refiriéndose las siglas ME a Máxima Entropía. El procedimiento desarrollado para el cálculo de los pesos es el siguiente: En primer lugar se selecciona un valor deseado de *orness* (tomando un valor optimista) α ; a continuación se determinan aquellos pesos que permiten obtener el valor deseado α con máxima dispersión (entropía). En particular se resuelve el siguiente problema de programación:

$$\text{Maximizar} \left(-\sum_i w_i \ln w_i \right)$$

Sujeto a las restricciones conocidas

$$1. \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

$$2. w_i \in [0,1]$$

A las que se les añade

$$3. \alpha = \frac{1}{n-1} \sum_i^n (n-i) \cdot w_i.$$

Se puede observar cómo a través de un único parámetro α se obtienen el total de los pesos del sistema deseado, siguiendo este proceso la filosofía de las técnica de máxima entropía. Una extensión de los operadores ME-OWA es la que usa como medida de entropía $1 - \text{Max}_i[w_i]$, lo que equivale a tener como función objetivo minimizar el $\text{Max}_i[w_i]$.

I.1.2.2 S-OWA

Orta familia de operadores OWA son los S-OWA. Estos operadores son clasificados en dos subfamilias según sean del tipo *or* o del tipo *and*.

Los operadores S-OWA del tipo *or* se denotados como FSO definen sus pesos como sigue:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\alpha) + \alpha & i = 1 \\ \frac{1}{n}(1-\alpha) & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Usando esta definición, se obtiene una forma de agregación de interés

$$F_{SO}(a_1, \dots, a_n) = \alpha \text{Max}_i(a_i) + \frac{1}{n}(1-\alpha) \sum_i a_i$$

Lo que permite generar un promedio ponderado entre el máximo y la media de los valores a agregar. En el caso de que $\alpha = 0$ se obtiene $\frac{1}{n} \sum a_i$ y en el caso de $\alpha = 1$ $\text{Max}(a_i)$. Es decir

$$F_{SO} = \alpha F^* + (1-\sigma)F_A.$$

La medida de *orness* de esta forma de agregar se calcula como sigue:

$$\text{orness}(F_{SO}) = \frac{1}{2}(\alpha + 1).$$

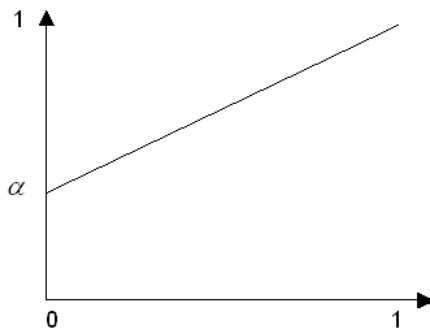


Figura 1.3. Cuantificador del tipo *or* para el operador S-OWA.

Se observa como para $\alpha \in [0,1]$, el valor del *orness* se situa en $[0.5, 1]$. Por esta razón, el operador FSO puede ser visto como una medida del tipo *or*. Además,

conforme aumenta el *orness*, se incrementa el valor de α . En particular, cuando $\alpha = 1$, obtenemos un $orness(\text{FSO}) = 1$ y cuando $\alpha = 0$, $orness(\text{FSO}) = 0.5$, por lo que en este caso estaremos usando una media simple.

La figura I.3 muestra la forma del cuantificador típico que genera un operador S-OWA del tipo *or*.

La segunda clase de operadores S-OWA, denotados como FSA son los catalogados dentro del tipo *and*, y se definen como sigue:

$$\text{i. } w_i = \frac{1}{n}(1 - \beta), \quad i \neq n$$

$$\text{ii. } w_n = \frac{1}{n}(1 - \beta) + \beta$$

Donde $\beta \in [0, 1]$. Usando estos pesos, obtenemos

$$F_{SA}(a_1, \dots, a_n) = \beta \text{Min}_i(a_i) + \frac{1}{n}(1 - \beta) \sum_i a_i$$

En este caso se obtiene un promedio ponderado entre los valores mínimos y promedio del conjunto a agregar. Es claro que

$$F_{SA} = \beta F_* + (1 - \beta) F_A$$

Siendo su medida de *orness*:

$$orness(F_{SA}) = \frac{1}{2}(1 - \beta).$$

Por lo que se va a encontrar siempre entre los valores 0.5 y 0. De esta forma si se calcula el *andness* se consigue un valor que se situará entre 1 y 0.5. Al igual que en el caso anterior, si se toma $\beta = 0$ se obtiene FAV, de lo que se desprende que la media aritmética o FAV es un operador situado entre el *and* y *or*.

La figura I.4 muestra el cuantificador que genera una agregación S-OWA del tipo *and*.

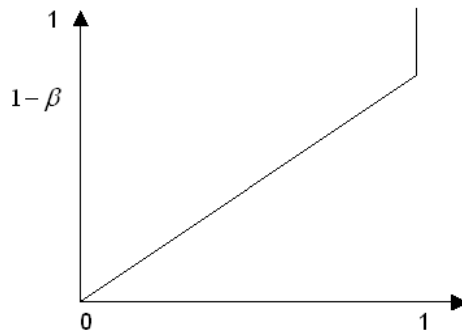


Figura 1.4. Cuantificador del tipo *and* para el operador S-OWA.

Estos operadores presentan unas propiedades muy útiles. Primero, dado un valor de *orness*, λ , es muy fácil generar los pesos asociados con la agregación expresada por dicho valor.

Si $\lambda \geq 0.5$ se usa un S-OWA del tipo *or* con $\alpha = 2\lambda - 1$.

Si $\lambda < 0.5$ se usa un S-OWA del tipo *and* con $\beta = 1 - 2\lambda$.

Una vez obtenidos los pesos, el cálculo de la agregación es muy simple, únicamente es necesario el sumatorio de los elementos más el *Max* o *Min* de la agregación.

En (Yager & Filev, 1992) se usa este tipo de operadores para generar una nueva clase de controladores lógicos flexibles con lógica borrosa.

Este operador presenta ventaja de permitir combinar las dos familias de operadores α , β vistos produciendo un operador S-OWA generalizado. Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta \leq 1$, se define:

$$i. \quad w_1 = \frac{1}{n}(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$$

$$ii. \quad w_i = \frac{1}{n}(1 - (\alpha + \beta)), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$iii. \quad w_n = \frac{1}{n}(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$$

Esta generalización se denota como F_s siendo su fórmula general:

$$F_s(a_1, \dots, a_n) = \alpha \text{Max}_i[a_i] + \beta \text{Min}_i[a_i] + (1 - (\alpha + \beta)) \sum_i a_i$$

I.1.2.3 Step-Owa

Los operadores Step OWA u operadores del tipo escalón (Yager, 1993), se denotan como $F_{step}(k)$ y definen sus pesos como sigue:

- i. $w_k = 1$
- ii. $w_i = 0, i \neq k$

Como se puede observar, con los operadores step-OWA, se obtiene un único peso distinto de cero, el cual se corresponde exactamente con el peso k . Si $k = 1$ obtendremos el operador F^* , mientras que cuando tengamos $k = n$ se generará F_* .

Es fácil comprobar que $F_{step(k)}(a_1, \dots, a_n) = b_k$ donde b_k se corresponde con el k -ésimo elemento mayor del conjunto de elementos, siendo éste el resultado de la agregación.

La dispersión asociada a este operador se puede calcular como

$$Disp(F_{step(k)}) = -\sum w_i \ln w_i = 0$$

Por lo que es considerado como una agregación de entropía mínima.

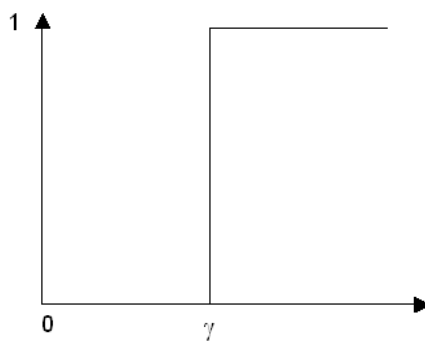


Figura 1.5. Cuantificador del tipo escalón o step.

La medida de *orness* asociada con este operador se calcula como:

$$orness(F_{step(k)}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) \cdot w_i = \frac{n-k}{n-1}$$

La figura I.5 muestra el tipo de cuantificador lingüístico que genera este tipo de familia de operadores OWA el cual es el que da nombre a la misma.

Para estos cuantificadores $w_k = 1$ si $\frac{k-1}{n} < \gamma \leq \frac{k}{n}$. Siempre con $\gamma > 0$.

Semánticamente este cuantificador se interpreta como al menos γ por ciento. Si n se considera fija, entonces se interpreta como al menos $n \gamma$.

I.1.2.4 Window-Owa

Los operadores del tipo window, se caracterizan por usar dos parámetros, k y m para poder determinar los pesos de la agregación. Estos operadores se denotan como F_w y se definen como sigue:

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k \\ \frac{1}{m} & \text{si } k \leq i < k+m \\ 0 & \text{si } i \geq k+m \end{cases}$$

Siendo k y m números enteros positivos tal que $k+n \leq n+1$, donde n representa la cardinalidad de la agregación OWA. Es fácil comprobar que los operadores del tipo window tienen un total de m pesos distintos de cero y todos con el idéntico valor $\frac{1}{m}$, siendo k la posición donde comienza el vector no nulo.

Un vector típico para este caso es, por ejemplo $W = [0 \ 0 \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ 0]$.

Usando este tipo de pesos se obtiene la fórmula general para el operador

$$F_w(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{m} \sum_{j=k}^{k+m-1} b_j,$$

donde b_j es el j -ésimo valor mayor de los a_i . Como se observa, este operador establece una “ventana” para la colección de elementos ordenados comenzando desde la posición k dentro de la cual se realiza un promedio de los elementos de la agregación.

La entropía o dispersión asociada a este tipo de agregación es fácilmente calculable a través de la expresión

$$Disp(F_w) = -\sum_{i=1}^n w_i \ln w_i = -\sum_{i=k}^{k+m-1} \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} = -\ln \frac{1}{m} = \ln m$$

Es interesante comprobar cómo la dispersión es siempre relativa al número de elementos que se agregan, a mayor número de elementos, mayor dispersión.

El grado de *orness* asociado a este operador se calcula con la siguiente expresión

$$orness(F_w) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i)w_i$$

$$orness(F_w) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=k}^{k+m-1} (n-i)w_i = \frac{1}{n-1} \frac{1}{m} \sum_{i=k}^{k+m-1} (n-i) = \frac{1}{n-1} (n-k - \frac{1}{2}(m-1))$$

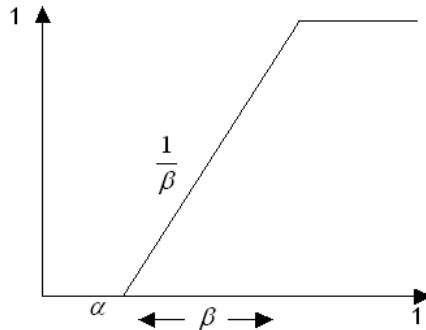


Figura 1.6. Cuantificador del tipo window.

Se observa cómo al incrementar k o m se disminuye el $orness(F_w)$. La figura I.6 muestra el cuantificador típico que genera este modelo de agregación. Se puede comprobar cómo en el caso de que m sea 1 se obtiene un cuantificador del tipo escalón.

I.1.2.5 Neat-OWA

Otra de las familias de operadores OWA de mayor importancia son los denominados neat-OWA, que se caracterizan, en este caso, por que los pesos dependen de los valores a agregar.

En la definición de los operadores OWA se indicó que

$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j$, donde b_j es el j -ésimo valor mayor de las a_n , con la

restricción para los pesos de satisfacer (1) $w_i \in [0,1]$ y (2) $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

En todas las definiciones anteriores, se asume que los pesos son valores fijos constantes. No obstante, para esta familia de operadores los pesos serán calculados en función de los elementos que se agregan, o más exactamente de los

valores a agregar ordenados, los b_j , manteniéndose las condiciones (1) y (2). Es este caso los pesos son: $w_i = f_i(b_1, \dots, b_n)$, definiéndose el operador

$$F(a_1, \dots, a_n) = \sum_i f_i(b_1, \dots, b_n) \cdot b_i$$

Para esta familia, donde los pesos dependen de la agregación, no se exige la satisfacción de todas las propiedades de los operadores OWA

Toda agregación de elementos debe estar entre los valores producidos por las funciones F^* y F_* .

El operador es idempotente $F(a, \dots, a) = a$

El operador es conmutativo, es decir, el orden de los elementos a_i no es relevante.

Una propiedad que no es necesariamente satisfecha para esta familia de operadores es la monotonía. Sean $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $C = (c_1, \dots, c_n)$ dos conjuntos a agregar tales que $a_i \geq c_i$ para toda i . Si los pesos se mantienen constantes entonces

$$F(A) \geq F(C)$$

Como se puede comprobar, en el caso de que los pesos dependan de los elementos a agregar, al cambiar los valores los w_i también pueden cambiar, por lo que no se puede asegurar que se satisfaga esta propiedad para todos los casos.

Además, para poder afirmar que un operador de agregación es *neat*, es necesario que el valor final de agregación sea independiente del orden de los valores. Sea $A = (a_1, \dots, a_n)$ las estradas a agregar, sea $B = (b_1, \dots, b_n)$ las entradas ordenadas y $C = (c_1, \dots, c_n) = Perm(a_1, \dots, a_n)$ una permutación de las entradas. Formalmente se define un operador OWA como *neat* si

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i$$

Produce el mismo resultado para cualquier asignación $C = B$.

Un típico ejemplo de operador OWA *neat* es cuando $w_i = \frac{1}{n}$. Por lo que

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

En este caso, como los pesos son fijos, esta es la única expresión de cálculo para el operador. Por otro lado, es usual que al depender los pesos de los valores a agregar surjan distintos tipos de operadores *neat* dentro de la misma familia.

Una de las características a señalar de los operadores *neat* OWA es que no necesitan ser ordenados para su proceso. Esto implica que la formulación de un operador *neat* puede ser definida usando directamente los argumentos en lugar de los elementos ordenados.

Una primera familia de operadores cuyos pesos dependen de la agregación son los denominados BADD-OWA introducidos por Yager & Filev (1992).

En este caso, el operador define sus pesos como:

$$w_i = \frac{b_i^\alpha}{\sum_i b_i^\alpha}, \alpha \geq 0.$$

Se puede comprobar que se satisfacen satisfacer las condiciones:

1. $w_i \in [0,1]$
2. $\sum_{i=1}^n w_i = 1.$

Por lo que la función de pesos puede ser aceptada como válida.

Para este operador la función quedaría como sigue:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_i b_i^{\alpha+1}}{\sum_i b_i^\alpha}$$

Donde se puede comprobar fácilmente que es un operador de la clase *neat* que no necesita del proceso de ordenación de los argumentos

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_i a_i^{\alpha+1}}{\sum_i a_i^\alpha}, \alpha \geq 0$$

Se observa como cuando $\alpha = 0$ se obtiene $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_i a_i$, que se corresponde con la media aritmética o promedio simple F_{ave} . Cuando $\alpha = 1$, se obtiene

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_i a_i^2}{\sum_i a_i}$$

Cuando $\alpha \rightarrow \infty$ se obtiene

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{Max}[a_i] = F^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

En (Yager & Filev, 1992) se muestra cómo estos operadores no son monótonos respecto a los argumentos. Para comprobar la no monotonía consideraremos el caso donde $n = 2$ y $\alpha = 1$. En este caso

$$F(a_1, a_2) = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2}$$

Si asignamos los valores $a_1 = 1$ y $a_2 = 0.2$, entonces la función agregada vale

$$F(1, 0.2) = \frac{1 + 0.04}{1.2} = 0.866$$

Si asignamos los valores $a_1 = 1$ y $a_2 = 0.3$, en este caso la función agregada valdrá

$$F(1,0.3) = \frac{1+0.09}{1.3} = 0.838$$

a pesar de que el valor correspondiente al segundo término ha sido incrementado en una décima de unidad.

Otros muchos operadores tradicionales pueden ser catalogados como operadores *neat* OWA, ya que satisfacen las propiedades necesarias para ser agrupados como miembros de esta clase, ejemplos de estos operadores son la media aritmética o la media armónica.

I.2 PROBLEMAS DE AGREGACIÓN EN LA TOMA DE DECISIÓN EN GRUPO

Como se ha comentado en la introducción a este capítulo, uno de los principales retos que plantean las distintas disciplinas que estudian el problema de la toma de decisión en grupo es, precisamente, cómo modelar de forma adecuada una solución final al proceso de agregación de los valores expresados por los individuos que toman parte en el problema, que pueda ser lo más cercana y representativa de los mismos. Básicamente, el objetivo es obtener un resultado que pueda ser satisfactorio sino para todos, sí para la más amplia mayoría de las personas que intervienen. Es en este punto, donde el concepto de mayoría juega un rol crucial a la hora de expresar la validez de los resultados que se obtengan tras la aplicación del modelo de decisión.

Independientemente del esquema de decisión que se utilice, el operador de agregación que se use desempeña un papel principal dentro de todo el proceso. En este sentido, como ya se ha mencionado, este trabajo se centra en los

operadores OWA, principalmente porque, desde su definición, se han mostrado como una de las opciones más eficaces para su uso en los problemas de toma de decisión en grupo (Herrera et al. ,1996; Pasi & Yager, 2006; Peláez & Doña, 2006; Llamazares, 2007; Wu & Chen, 2007), tanto por las propiedades específicas que satisfacen (Yager, 1988; Liu, 2006; Amin 2007) como por la posibilidad de representar conceptos borrosos como la mayoría a través de la semántica de agregación de sus operadores y su combinación con cuantificadores lingüísticos (Pasi & Yager 2006; Peláez et al. 2007).

A continuación se realiza un análisis exhaustivo de la semántica de agregación en los procesos de toma de decisión de los operadores OWA, así como de los distintos problemas y soluciones que se plantean en la literatura actual.

I.2.1 Semántica en la Toma de Decisión

En las distintas definiciones que se realizan de los procesos de toma de decisión, la semántica de agregación se modela a través del significado que aportan los cuantificadores lingüísticos como pueden ser *al menos el 80%*, y *muchos*. Un cuantificador lingüístico se define formalmente como un subconjunto borroso de un dominio numérico donde la semántica de cada subconjunto borroso se describe a través de una función de pertenencia la cual define la compatibilidad de una cantidad dada con el concepto expresado por el cuantificador lingüístico (Barwise & Cooper , 1981; Keenan & Westerstal 1997).

De esta forma, en los problemas de toma de decisión en grupo, los cuantificadores lingüísticos se usan para indicar la estrategia de fusión que debe guiar el proceso de agregación de opiniones. Esta interpretación se puede ver como un concepto borroso que hace referencia a la cantidad de elementos a

considerar dentro del conjunto de referencia. Como se mostró en el apartado anterior la noción de agregación guiada por cuantificadores se desarrolló formalmente con la definición de los operadores OWA (Yager 1988, 1993) y el concepto de integrales borrosas (Grabisch, 1995).

Una de las semánticas que comúnmente se asocian con los operadores OWA es la generalización de los cuantificadores lógicos *para todo* y *existe*, donde los argumentos pueden verse como valores de verdad o grados de satisfacción. Por ejemplo, si Q es un cuantificador entonces la agregación OWA genera un valor que se puede entender como el valor de verdad de la expresión “ Q de los elementos agregados son satisfechos”. Este tipo de semántica es la más usada cuando se aplica este operador a los problemas de decisión en grupo. No obstante, debido a la formulación expuesta para el cálculo de los pesos, estamos en disposición de afirmar que esta agregación no es representativa del concepto de agregación deseado en los procesos de decisión.

Por ejemplo, Si deseamos agregar 5 valores usando el cuantificador lingüístico *al menos 80%*, una definición crisp del operador produce un vector de pesos $W_{al\ menos\ 80\%} = [0\ 0\ 0\ 1\ 0]$. Si aplicamos este operador al vector de valores $[1\ 1\ 1\ 0.1\ 0]$ y $[0.1\ 0.1\ 0.1\ 0.1\ 0]$ se puede comprobar que el valor de agregación obtenido para ambos casos es 0.1. Este resultado muestra el hecho de que el cuantificador lingüístico usado con la formulación tradicional de los operadores OWA produce una agregación con la semántica “Es cierto que al menos el criterio correspondiente al 80% es totalmente satisfecho”. Para este ejemplo, en ambos casos el valor de agregación se corresponderá con el cuarto elemento (en orden decreciente) que se identifica con la evaluación del 80% de los valores, independientemente del grado de satisfacción de los valores previos.

Una posible solución a este problema del operador consiste en redefinir la semántica del cuantificador lingüístico *al menos 80%* de forma similar a como se modela el concepto semántico de mayoría en los procesos de decisión. En este caso, se puede usar un cuantificador como *muchos* que se definirá de forma que se interprete como el concepto expresado por la expresión *al menos 80%* de los criterios se satisfacen. Es decir, a través de la definición matemática de la función del cuantificador se indicará la cantidad de elementos a considerar en la agregación (en este caso el 80%). Este cuantificador ha de tener una semántica del tipo *and*. Por ejemplo, si se consideran 6 elementos a agregar usando el cuantificador *muchos* con una semántica cercana al significado de la expresión original *al menos 80%* (figura I.7) un posible vector de pesos será [0 0 0.18 0.34 0.34 0.14], en el que, para este caso, el concepto a expresar se corresponde con tener al menos 4 elementos considerados dentro del proceso.

$$\mu_{most}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0.9 \\ 2x - 0.8 & 0.4 < x < 0.9 \\ 0 & x \leq 0.4 \end{cases}$$

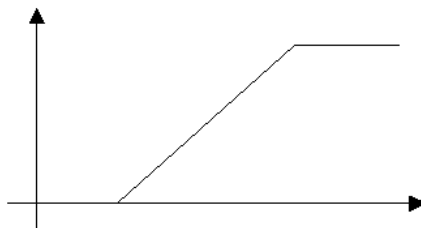


Figura 1.7. Definición del cuantificador lingüístico *muchos*.

No obstante, este primer acercamiento a una posible solución partiendo únicamente de la semántica que podemos expresar a través de los cuantificadores no es válido como se puede ilustrar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Si tomamos el siguiente vector a agregar (1 1 1 0.5 0 0). El resultado de la agregación tras usar el vector de pesos generado con el anterior cuantificador es 0.35. De forma obvia, este valor no caracteriza un valor donde se refleje la mayoría de los individuos (80%). Un resultado correcto debería estar, de forma intuitiva, alrededor de 0.75.

Como se ha mostrado, en ambos casos e independientemente del modelo de cuantificación usado, la semántica junto con la definición de los pesos del operador OWA no produce una solución representativa de la cantidad expresada por el cuantificador, debido básicamente a que, en la definición del cálculo del vector W , la interpretación que se realiza de los pesos se basa en incrementar la satisfacción del criterio $i + 1$ partiendo de la consideración realizada sobre el criterio i . Por ello, el resultado generado por estos modelos se puede considerar inadecuado para su aplicación a los problemas de decisión en grupo, ya que la semántica que el cuantificador genera para guiar el proceso de agregación no es capaz de modelar el sentido social de máxima satisfacción de los individuos involucrados en el proceso, es decir, no consigue modelar una semántica de mayoría donde la agregación considere Q de los valores más representativos del grupo.

I.2.2 Operador IOWA

Como se ha mostrado, el operador OWA es uno de los más usados en los problemas de toma de decisión para definir el método de fusión de datos. En este operador la agregación se puede realizar desde distintas perspectivas todas ellas orientadas a conseguir reflejar una semántica de mayoría, donde el concepto de mayoría es definido como aquella evaluación colectiva donde se han considerado el mayor número de valoraciones involucradas en el problema de decisión a

resolver (Peláez & Doña, 2003a; Pasi & Yager, 2002, 2006). En estos casos, no es necesario obtener un resultado que dé lugar a la unanimidad de todos los individuos, pero si es deseable que la solución obtenida satisfaga a la mayoría de los decisores (Nurmi & Kacprzyk, 1991; Peláez & Doña, 2003b, Pasi & Yager 2002, 2006).

No obstante, se ha comprobado como la semántica de este operador no consigue reflejar este concepto de forma que se genere una solución aceptable desde un punto de vista social.

Para intentar paliar este problema, Pasi & Yager (2002, 2006) proponen el uso de una variante de los operadores OWA denominados Induced Ordered Weighted Averaging u operadores IOWA para su aplicación en los problemas de toma de decisión.

Los operadores IOWA son introducidos por Yager & Filev (1999) como una extensión de los operadores OWA donde, asociado con cada valor a_j a agregar existe un valor v_j denominado valor de inducción, de forma que se usará una función de ordenación v -index tal que v -index(i) se corresponde con el mayor índice i -ésimo de las v_j .

El operador se define formalmente

$$I-F(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot a_{v\text{-index}(i)}$$

Donde el orden de los valores a_j viene dado respecto al valor de v_j ($\text{par}(a_j, v_j)$, a_j se corresponde con el valor y v_j con el orden inducido). Si W es un vector de

pesos y B_v , es el vector con los argumentos ordenados según los valores de inducción, entonces:

$$I-F(a_1, a_2, \dots, a_n) = W^T B_v.$$

Para producir una agregación que pueda expresar una semántica de mayoría, Pasi & Yager (2002, 2006) proponen el uso del operador IOWA junto con una función de inducción basada en una función de distancia que mida la proximidad de los elementos a agregar. De esta forma, los elementos que estén en posiciones cercanas tendrán más opciones de ser considerados en la agregación.

Los valores de inducción, se calculan usando una función de similaridad entre pares de valores a agregar. Esta función es binaria y devuelve si los elementos están suficientemente cerca unos de otros. Un ejemplo de este tipo de funciones es el siguiente:

$$\text{sup}(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |a_i - a_j| < \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si se considera un conjunto de elementos a agregar y queremos ordenarlos en función de su similaridad con todos los otros valores de la agregación, los valores de inducción se calcularán usando la suma de todas las funciones *sup* de un valor con respecto a todos sus pares. Si a su vez sumamos todos los valores de inducción obtendremos un valor de soporte para todo el conjunto de agregación.

Un ejemplo de aplicación de este nuevo modelo es el siguiente (se usará un valor $\alpha = 0.3$).

Ejemplo. Sean los siguientes valores a agregar:

$$a_1 = 0.9 \quad a_2 = 0.7 \quad a_3 = 0.6 \quad a_4 = 0.1 \quad a_5 = 0$$

El valor de inducción para cada a_i se obtiene sumando sus respectivas funciones *sup* y se denota como s_i :

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 2 \quad s_3 = 1 \quad s_4 = 1 \quad s_5 = 1$$

Este resultado, produce la siguiente ordenación de los valores: $I = [0 \ 0.1 \ 0.6 \ 0.9 \ 0.7]$.

Si deseamos obtener una agregación de mayoría que sea socialmente aceptable podríamos usar el operador IOWA junto con la definición del cuantificador *muchos* propuesto en la figura I.7. Partiendo de esta definición, el vector de pesos para 5 elementos es $W = [0 \ 0 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.2]$.

Es importante observar que el quinto elemento del vector es menor que los dos anteriores.

Al agregar el vector I usando este vector de pesos se obtiene: $I \cdot W = 0.76$. Este valor si parece ser más representativo de la mayoría que el obtenido con la aplicación tradicional del operador OWA ($B = [0.9 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.1 \ 0]$, con $B \cdot W = 0.28$). Por otro lado, como se ha mencionado, el vector de pesos W tiende a decrecer en sus últimas posiciones, por lo que en contra de lo deseado, los valores con mayor repercusión en la agregación tendrán un peso menor dentro del sistema de decisión.

Basándose en esta situación, en (Pasi & Yager, 2006) se propone una nueva estrategia para la construcción del vector de pesos en los operadores IOWA. En la siguiente subsección se muestra esta variación en la función de pesos del operador IOWA así como los problemas que presenta.

I.2.3 Operador IOWA Modificado

La modificación del operador IOWA desarrollada en (Pasi & Yager 2006) se basa en cambiar la formulación del cálculo del vector de pesos. Esta nueva estrategia tiene el objetivo de enfatizar los valores más importantes dentro del grupo a agregar en función de su valor de proximidad con los restantes valores, solucionando el problema de la reducción de pesos para las últimas posiciones del vector W .

Primero se calcula los valores de soporte para los n valores a agregar (s_1, s_2, \dots, s_n). Para la construcción del nuevo vector de pesos se hará uso de unos nuevos valores t_1, t_2, \dots, t_n , modificación de los anteriores s_i , de forma que $t_i = s_i + 1$. De esta forma se incluye la similaridad de a_i con sí mismo.

Los valores t_i mantienen un orden creciente, de forma que t_1 es el menor valor de entre todos los t_i . De esta forma, el nuevo vector de pesos se calcula:

$$w_i = \frac{Q\left(\frac{t_i}{n}\right)}{\sum_{j=1}^n Q\left(\frac{t_j}{n}\right)}$$

El valor $Q\left(\frac{t_i}{n}\right)$ representa el grado con que cada miembro del conjunto de valores representa el concepto de mayoría en la agregación.

No obstante, es fácil encontrar el error producido en la formulación anterior, basta con usar el cuantificador definido en la figura I.7 para agregar el conjunto de valores [0 0.1 0.6 0.9 0.7]. El vector de pesos obtenido en este caso es correcto y contiene los valores [0 0 0.333 0.333 0.333], pero si intentamos agregar, por ejemplo el vector [0 0 0.5 0.5 1 1 1], usando el mismo cuantificador se obtiene un valor indeterminado para todos los w_i ($\frac{0}{0}$). Debido a que los valores t_i (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3) divididos por n (7) siempre serán menores a 0.4 por lo que $Q\left(\frac{t_i}{n}\right) = 0$ para todo i .

Se demuestra que usando la definición anterior para el cálculo de los pesos y la definición usual del cuantificador *muchos* (figura I.7), cuando $x_i = \frac{t_i}{n} \leq a$ el valor para $Q(x_i)$ es cero, por lo que para toda i , $t_i \leq n \cdot a$ y todos los w_i tomarán el valor indeterminado $\frac{0}{0}$.

Obviamente, los resultados que pueden producirse al usar la estrategia propuesta pueden ser incorrectos desde el punto de vista de agregación social, dependiendo de cuales sean los elementos a agregar en combinación con el cuantificador seleccionado.

I.3 OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

Hasta ahora se ha realizado una definición de los distintos operadores usados en toma de decisión en grupo y se han presentado las principales críticas realizadas a los mismos. Los capítulos siguientes de esta memoria se han dedicado al análisis y resolución de los problemas planteados en dichas críticas, así como a la aplicación de estas soluciones en situaciones reales donde los sistemas desarrollados puedan presentar alguna ventaja frente a las soluciones actuales. La estructura a seguir es la siguiente:

En el segundo capítulo se presentan los operadores de agregación social de mayoría, así como los procesos necesarios para modelar una semántica adecuada a los problemas de toma de decisión a través del uso de cuantificadores lingüísticos. Además se realiza una generalización del operador que da lugar a nuevas extensiones a otras familias de operadores OWA tanto en entornos aritméticos como geométricos.

En el tercer capítulo se desarrollan, desde una perspectiva social, nuevos procesos de decisión basados en el enfoque directo usando operadores de mayoría adaptados al uso de etiquetas e información lingüística mostrándose su idoneidad para este tipo de problemas a través de los axiomas sociales y propiedades que satisface.

En el cuarto capítulo se aplican estos operadores a la resolución de problemas de decisión y agregación de distinta índole, como son: valoración de empresas, imputación de datos y tratamiento de imágenes.

Finalmente se exponen las conclusiones que se derivan de esta memoria, así como las aportaciones y principales líneas de futuros trabajos que han surgido durante su desarrollo.

Capítulo 2 Operadores de Mayoría

Como se ha visto, el modo en el que la función de pesos puede expresar la importancia relativa de los atributos o elementos que intervienen en la fase de agregación dentro de los sistemas de decisión debe considerar, de alguna manera, las características de los elementos que intervienen en dicho proceso. Una de estas características es el orden de los atributos o elementos que intervienen en el proceso de agregación. En el capítulo anterior se ha descrito cómo, para valorar esta característica, se definen los operadores OWA. Estos operadores se basan en una ponderación de pesos en función del orden de los elementos considerados, y se definen como un proceso de agregación intermedio entre los operadores *Max-Min* y *and-or* lógicos. No obstante, como se ha expuesto, estos operadores no consiguen representar una semántica aceptable desde un punto de vista social para los problemas de toma de decisión en grupo.

Otra característica a considerar en la agregación social es la importancia relativa que poseen los atributos o elementos que intervienen en el proceso de agregación. Para valorar esta característica se diseñan los operadores que se muestran en este capítulo. Estos operadores penalizan o premian los valores a través de una función de importancia sobre los atributos que intervienen en el proceso.

El propósito de este capítulo es presentar los operadores de agregación de mayoría OWA así como nuevas variantes que permiten introducir el concepto de cuantificador lingüístico en el cálculo de los pesos. Finalmente, se presenta una generalización de los operadores que da lugar a nuevas familias de operadores OWA.

II.1 OPERADORES DE MAYORÍA NEAT-OWA

Uno de los principales problemas que se encuentran en los sistemas de decisión social es, como se ha expuesto anteriormente, encontrar procesos de agregación que contemplen todas las opiniones expuestas por los individuos involucrados en el proceso, de forma que la mayoría de los mismos vean sus intereses reflejados de forma positiva en el resultado final. Los operadores que generalmente se usan en los procesos de agregación producen resultados que pueden ser considerados inadecuados desde un punto de vista social dando lugar a los denominados problemas de negociación y distribución (Von Neumann & Morgenstern, 1944; Nash, 1950; Robertson & Webb, 1998; Peláez & Doña, 2003a; Peláez et al., 2007).

Por ejemplo, si se desea agregar el siguiente conjunto de valores: [7, 7, 7, 7, 5, 4, 1, 1, 1]. Los operadores clásicos consideran cada elemento de forma individual para establecer el peso de cada valor dentro del proceso de fusión. Si se analiza el

conjunto de valores, se comprueba cómo el 55% de los valores son superiores a 4, mientras que el 44% toman el valor 7. Este análisis nos lleva a intuir que un valor de agregación social del conjunto debería situarse entre 5 y 6, de forma que se consiguieran incluir los intereses mayoritarios pero sin desestimar totalmente los valores minoritarios.

Aplicando los operadores anteriormente descritos con una semántica de mayoría obtenemos, para el caso del operador OWA usando el cuantificador *muchos*, el valor 3. Si usamos otro operador típico como la media aritmética obtenemos 4,4. Ambos resultados se pueden considerar inadecuados al no reflejar la semántica deseada para los sistemas de decisión en grupo produciendo problemas de distribución.

Los problemas de distribución se deben principalmente a la forma en que los elementos son considerados dentro del proceso de agregación. Mientras que los sistemas clásicos realizan el cálculo de los pesos de forma general para todos los elementos, los procesos de agregación social deben considerar la formación de grupos que interaccionan para conseguir un resultado más fiel a los intereses generales del grupo.

En la toma de decisión social, la formación de coaliciones o grupos es una actividad habitual que llevan a cabo los decisores mediante la negociación, con el objetivo de formar conjuntos con opiniones comunes que les permita alcanzar una solución lo más cercana a su valoración original. En (Gamson, 1961; Riker, 1962; Hinckley, 1976; Egea 2004) se muestra cómo los conflictos de intereses entre individuos y organizaciones pueden ser resueltos formando alianzas pertinentes entre los implicados y esforzándose, a continuación, en negociaciones

destinadas a buscar solución de tales conflictos, de acuerdo con las relativas fuerzas de cada individuo o grupo de individuos implicados.

La formación de grupos o coaliciones se llevan a cabo mediante procesos negociadores en los que los participantes se aproximan progresivamente conforme la distancia que les separa disminuye (Budge et al. 1990). Müller & Strom (2000) muestran, que en los procesos de negociación, los grupos más significativos y numerosos por el tamaño de su representación y proximidad participan e influyen de manera manifiesta, pero también intervienen, de manera considerable, la oposición estratégica del resto de los grupos. Por este motivo cobra especial relevancia la estrategia del proceso de negociación ya que según como se formen las alianzas en los procesos de agrupación se obtendrán unos resultados u otros.

En los procesos de mayoría se considera la formación de grupos de coalición que negocian de forma equitativa e igualitaria para obtener un valor de representación que servirá para negociar con los otros grupos que se hayan formado durante el proceso. De esta forma, la agregación se realiza como sigue: (1) se selecciona de cada grupo de opinión un elemento para que negocien entre sí. (2) El valor obtenido de esta negociación formará un nuevo grupo de opinión con un único representante. (3) Se vuelve al primer paso en donde ahora se incluye la nueva opinión obtenida de la negociación del paso anterior. Obviamente, los grupos que se queden sin representantes no participarán en las sucesivas negociaciones. De forma gráfica se ilustra el proceso en la figura II.1.

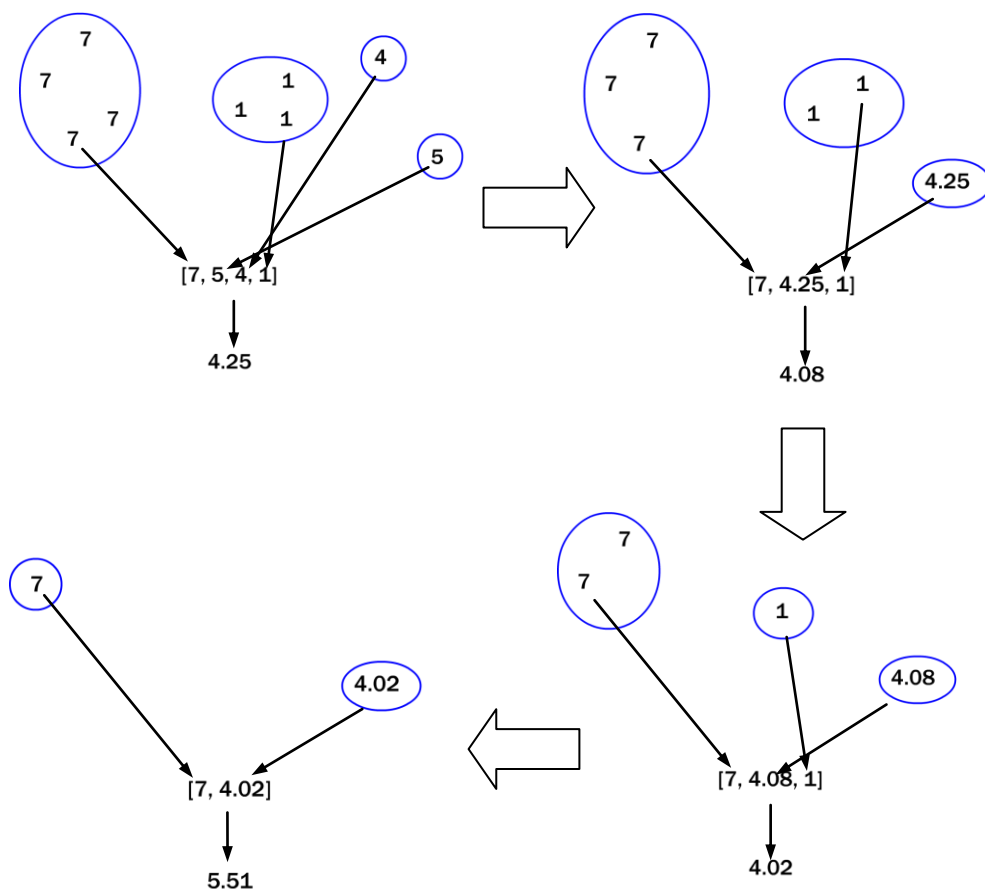


Figura 2.1. Representación del proceso de agregación de mayoría.

Como se puede comprobar, el valor de agregación obtenido es representativo de la mayoría de elementos del conjunto, considerando, al mismo tiempo, a los valores con una representación minoritaria en la agregación. De esta forma, el resultado es una agregación más precisa desde el punto de vista social consiguiéndose paliar los problemas de distribución.

II.1.1 Definición formal

La definición de este proceso de agregación se realiza usando la nomenclatura de los operadores neat OWA:

Definición. El operador MA-OWA es una función $F_{MA} : R^n \times N^n \rightarrow R$ definida como

$$F_{MA}((a_1, \delta_1), (a_2, \delta_2), \dots, (a_n, \delta_n)) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j = \sum_{j=1}^n f_j \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot b_j$$

donde $w_j \in [0,1]$; $\sum_{j=1}^m w_j = 1$; se ha realizado la conversión del vector original con

repeticiones a un vector de tuplas (a_i, δ_i) donde el primer elemento representa el valor a agregar sin repeticiones y el segundo elemento su cardinalidad; y b_j es el j -ésimo mayor elemento de las tuplas ordenados por δ_i . Por ejemplo, para el caso anterior el conjunto a agregar es $[7, 7, 7, 7, 5, 4, 1, 1, 1]$ por lo que $A = [(7, 4), (1, 3), (5, 1), (4, 1)]$.

El cálculo de los pesos de la agregación se realiza siguiendo el modelo anteriormente descrito, que se formaliza como sigue:

$$w_i = f_i(b_1, \dots, b_n) = \frac{\gamma_i^{\delta_{\min}}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}} - 1 \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}} + 1 \cdot \theta_{\delta_{\min}}}$$

$$+ \frac{\gamma_i^{\delta_{\min} + 1}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max} - 1} \cdots \theta_{\delta_{\min} + 1}} + \dots + \frac{\gamma_i^{\delta_{\max} - 1}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max} - 1}} + \frac{\gamma_i^{\delta_{\max}}}{\theta_{\delta_{\max}}}$$

donde

$$\gamma_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_i \geq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\theta_i = \begin{cases} (\text{número de etiquetas con cardinalidad } \geq i) + 1 & \text{si } i \neq \delta_{\min} \\ \text{número de etiquetas con cardinalidad } \geq i & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los operadores de mayoría realizan la agregación en función del valor δ_i que generalmente toma el valor de la cardinalidad del elemento i para representar su importancia en la agregación. Como se indicó anteriormente, en los procesos de mayoría se considera la formación de grupos de discusión o grupos de mayoría en función de su similaridad o distancias entre las opiniones de los expertos, de forma que todos los valores dentro de un radio de separación son considerados dentro de un mismo grupo. El método de cálculo del valor δ_i es independiente de la definición de operador de mayoría, siendo el más usado por su simplicidad la función de distancia siguiente:

$$\text{dist}(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |b_i - b_j| \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La cardinalidad de b_i es la suma de todos los valores $dist(b_i, b_j)$ para $j = 1 \dots n$ siendo n el número de etiquetas a agregar.

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n dist(s_i, s_j)$$

El valor de x modela el tamaño final de cada grupo. Socialmente este grado mide la flexibilidad de los decidores ara formar grupos con el objetivo de reforzar sus posiciones.

Ejemplo. Sea el conjunto de valores a agregar $[0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 7 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9]$, donde el número de grupos usando una función de distancia con $x = 0$ es 4 y la frecuencia o cardinalidad ordenada en orden descendente es la siguiente:

$\delta_1 = 4$ (para el valor 9), $\delta_2 = 3$ (para el valor 0),

$\delta_3 = 1$ (para el valor 7) y $\delta_4 = 1$ (para el valor 5)

entonces:

$$F_{MA}((9,4),(0,3),(7,1),(5,1)) = 9 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 7 \cdot w_3 + 5 \cdot w_4 = 6.79$$

donde

$$w_1 = f(b_1, \dots, b_n) = \frac{\gamma_1^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_1^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_1^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_1^4}{\theta_4} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} = \frac{53}{72};$$

$$w_2 = f(b_1, \dots, b_n) = \frac{\gamma_4^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_4^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_4^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_4^4}{\theta_4} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{17}{72};$$

$$w_3 = f(b_1, \dots, b_n) = \frac{\gamma_3^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_3^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_3^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_3^4}{\theta_4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{72};$$

$$w_4 = f(b_1, \dots, b_n) = \frac{\gamma_2^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_2^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_2^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_2^4}{\theta_4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{72};$$

II.1.2 Propiedades

A continuación se mostrarán las propiedades más significativas del operador definido, donde se incluyen las características principales del mismo que muestran que su inclusión dentro de los operadores neat OWA, así como su idoneidad para ser usado como operador de agregación OWA.

Propiedad 1. Sumatoria de pesos igual a la unidad: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Para su comprobación se procede sumando el primer término de todos los pesos

w

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{\delta_{\min}}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1} \cdot \theta_{\delta_{\min}}} = \frac{\theta_{\delta_{\min}}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1} \cdot \theta_{\delta_{\min}}} = \frac{1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}+1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1}}$$

igualmente se continua con el segundo término:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{\delta_{\min}+1}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}+1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1}} = \frac{\theta_{\delta_{\min}+1} - 1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1}}$$

y con los siguientes:

$$\frac{1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1}} + \frac{\theta_{\delta_{\min}+1} - 1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1}} = \frac{1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+2}}$$

Si se repite el proceso para el resto de los términos, finalmente para el último valor obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{\delta_{\max}-1}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}+1}} = \frac{\theta_{\delta_{\max}+1} - 1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}+1}}$$

con el valor anterior

$$\frac{\theta_{\delta_{\max}-1} - 1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1}} + \frac{1}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1}} = \frac{1}{\theta_{\delta_{\max}}}$$

y finalmente

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{\delta_{\max}}}{\theta_{\delta_{\max}}} = \frac{\theta_{\delta_{\max}} - 1}{\theta_{\delta_{\max}}}$$

Con lo que si realizamos la suma del total se comprueba la propiedad

$$\frac{\theta_{\delta_{\max}} - 1}{\theta_{\delta_{\max}}} + \frac{1}{\theta_{\delta_{\max}}} = 1$$

Propiedad 2. Pesos comprendidos entre 0 y 1: $w_i \in [0,1]$.

La demostración es inmediata a partir de la propiedad anterior que muestra que la suma total de los pesos es siempre la unidad.

Para simplificar la notación en las demostraciones siguientes, la tupla (a_i, δ_i) se representará únicamente por a_i .

Partiendo de las dos propiedades anteriores se destacan tres casos importantes del operador: F_{ave} , F^* y F_* .

- Si $\delta_i = 1$ para todo $i=1, \dots, n$: $F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_i a_i = F_{Ave}$.
- Si $\delta_n \rightarrow \infty$: $F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{Max}[b_i] = F^*(b_1, b_2, \dots, b_n)$.
- Si $\delta_1 \rightarrow \infty$: $F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{Min}[b_i] = F_*(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Propiedad 3. El operador MA-OWA es un operador *or-and*.

$$F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Es inmediato comprobar que los operadores súper y sub estrella marcan los límites para el operador MA-OWA. Por ello queda demostrado que para todo F_{MA}

$$\text{Min}(a_i) \leq F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_i)$$

Propiedad 4. Conmutatividad.

El operador MA-OWA se puede considerar conmutativo. Si tomamos el conjunto a agregar $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ y realizamos una permutación de sus elementos $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$. Entonces

$$F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = F_{MA}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

La satisfacción de esta propiedad es inmediata debido al paso de ordenamiento por δ_i del proceso de agregación definido.

Propiedad 5. Crecimiento Monótono.

Una quinta característica al operador es la monotonía. Sean a_i y c_i con $i=1, \dots, n$ conjuntos a agregar, tales que para cada i , $c_i \leq a_i$. Entonces

$$F_{MA}(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Donde los valores de importancia son los mismos para ambos conjuntos.

Al mantenerse el valor de los δ_i , el valor de los pesos es el mismo, por lo que es trivial comprobar que al incrementar el valor de los elementos, aumenta el resultado de la agregación.

Propiedad 6. Idempotencia.

Otra característica relacionada con este operador es la idempotencia. Si $a_i = a$ para toda $i = 1, \dots, n$, entonces

$$F_{MA}(a, a, \dots, a) = a$$

Su demostración es inmediata por la propia definición del operador.

Propiedad 7. Simplificación.

Una nueva propiedad asociada con este operador es la simplificación. Sea a_i un conjunto de elementos a agregar, $i = 1, \dots, n$, y $\delta_i > 1$ para toda $i = 1, \dots, n$. entonces

$$F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = F_{MA}(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Donde los nuevos δ_i asociados a c_i se calculan como $\delta_i = \delta_i - \text{Min}\{\delta_i\} - 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.

II.2 GENERALIZACIÓN DE LOS OPERADORES DE MAYORÍA

Como se ha mostrado en el apartado anterior, los operadores de Mayoría se clasifican como operadores neat OWA, donde el resultado de la agregación es independiente tanto del orden de los elementos a agregar como de sus valores, siendo el factor determinante para el cálculo de los pesos la importancia de cada unidad dentro del grupo. Debido a esto, su *andness* (grado de optimismo o

maxness) no puede ser controlado y medido de la misma forma como en los operadores OWA no neat convencionales. Este hecho puede ser considerado una desventaja para la resolución de problemas en entornos donde sea necesario acotar de forma exacta los posibles rangos de solución.

Por esta razón, se propone en esta sección una generalización de la definición anterior, de forma que se puedan comprender en la misma, nuevas variaciones que no satisfagan la definición neat OWA.

Para una mejor comprensión de la generalización realizada se simplificará la definición anterior de los pesos del operador MA-OWA por una expresión recursiva más sencilla equivalente:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } i = 1 \\ \frac{\gamma_i^k + w_{i-1}}{u_i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\gamma_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_i \geq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ y $u_i = 1 + \sum_{j=1}^n \gamma_j^k$.

II.2.1 Operador de Importancia OWA (IM-OWA).

En el apartado anterior se definieron los operadores MA-OWA, donde se vio cómo la idea principal de estos operadores se centra en la realización de un proceso iterativo en el que se aplica como función de agregación el operador neat

OWA con pesos fijos $w_i = \frac{1}{n}$. Obviamente, aplicando la misma técnica de

agrupación, podemos obtener nuevas clases de operadores neat OWA con la simple sustitución de la función de agregación usada, por ejemplo, por la media armónica o mediana que se corresponden también con operadores de la familia neat OWA.

Basándose en esta idea se realiza una generalización que da lugar a los operadores de Importancia IM-OWA, donde el cálculo de los pesos se realizará, al igual que en el caso de los operadores de Mayoría, a través del valor de δ_i , pero con la ventaja de disponer total libertad de elección tanto para función de cálculo de δ_i , como del método de agregación a usar en cada paso del proceso.

Definición. El operador de Importancia OWA (IM-OWA) se define como una función $F_{IM,w} : R^n \times N^n \rightarrow R$.

$$F_{IM,w}((a_1, \delta_1), \dots, (a_n, \delta_n)) = \sum_{j=1}^n w_j(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \cdot b_j$$

tal que $w_i(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^n w_i(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 1$ y b_j es el j -ésimo mayor elemento de las tuplas (a_i, δ_i) , ordenados por el valor a_i .

Es fácil comprobar que las propiedades de conmutatividad e idempotencia se satisfacen, además, el operador es monótono si se mantiene el mismo vector de importancias δ para ambos conjuntos a agregar.

La propiedad de *max-min* para el operador IM-OWA queda como sigue:

$$F_{IM,w_*}((a_1, \delta_1), \dots, (a_n, \delta_n)) \leq F_{IM,w}((a_1, \delta_1), \dots, (a_n, \delta_n)) \leq F_{IM,w^*}((a_1, \delta_1), \dots, (a_n, \delta_n))$$

donde $w^* = (1, 0, \dots, 0)$ y $w_* = (0, \dots, 0, 1)$.

En este caso, al igual que en los operadores MA-OWA, la medida de *andness* así como la dispersión del operador dependerán de la importancia de cada elemento dentro del conjunto a agregar con respecto a los demás.

Se demuestra de forma inmediata, por la propia definición del operador IM-OWA, que es una generalización que engloba a la agregación MA-OWA cuando la función de pesos se corresponde con la de este operador.

II.2.2 Operador de Mayoría no neat (NMA-OWA)

Basándonos en la generalización anterior, podemos definir un nuevo operador que, haciendo uso del concepto de mayoría de los MA-OWA, no sea considerado como neat. Para ello se deberá disponer de los medios necesarios para poder controlar el *andness* de los pesos del nuevo operador.

Definición. El operador de Mayoría no neat OWA (NMA-OWA) se corresponde con una función $F_{NMA,w} : R^n \times N^n \rightarrow R$ definida como

$$F_{NMA,w}((a_1, \delta_1), \dots, (a_n, \delta_n)) = \sum_{j=1}^n w_j^k \cdot b_j, \quad k = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

donde $w_j^k \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^n w_j^k = 1$ y b_j es el j -ésimo mayor elemento de las tuplas a_i .

Calculándose los pesos usando la siguiente relación de recurrencia:

$$w_i^k = \begin{cases} w_1 & \text{si } i=1 \\ \frac{\gamma_i^k + w_i^{k-1}}{u_i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\gamma_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_i \geq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ y $u_i = 1 + \sum_{j=1}^n \gamma_j^k$.

Por su definición se comprueba que el operador NMA-OWA es una subclase de los IM-OWA, además, para el caso de que los pesos w_i sean $1/n$ se recupera el operador de Mayoría MA-OWA.

El uso de este operador se ilustra con la agregación del siguiente ejemplo donde a través del uso de distintos vectores W se muestran los límites *max-min*, se recupera el operador MA-OWA y se usa un vector de pesos generado al azar.

Ejemplo. Sea conjunto de elementos a agregar con sus respectivas cardinalidades $a = [(0.1, 3), (0.4, 1), (0.5, 1), (0.7,4)]$. Sus pesos se calculan como sigue:

$$w_1^N = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} (1 + w_1 \cdot 1) \right) \right),$$

$$w_2^N = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{3} (0 + w_2 \cdot 1) \right) \right),$$

$$w_3^N = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{3} (0 + w_3 \cdot 1) \right) \right),$$

$$w_4^N = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} (1 + w_4 \cdot 1) \right) \right)$$

Obteniéndose según el vector w usado:

$$F_{NMA, w_*}(a) = 0.533, \quad F_{NMA, w^*}(a) = 0.567,$$

$$F_{NMA, w_M}(a) = 0.543, \quad F_{NMA, 1/4}(a) = F_{MA}(a) = 0.551$$

donde $w_M = (0, 0.2, 0.3, 0.5)$.

II.2.3 Operador de Mayoría Ponderado (WMA-OWA)

El hecho de que para el operador NMA-OWA definido en el apartado anterior no sea capaz de recuperar las funciones F_* y F^* de los operadores OWA estándares cuando trabajamos con los vectores canónicos W_* y W^* se puede considerar una desventaja de este operador. Por esta razón se introduce otra nueva clase de operador OWA de mayoría ponderada (Weighted Majority OWA o WMA-OWA) que sí satisfaga esta propiedad.

Definición. El operador de Mayoría ponderada (WMA-OWA) se define como una función $F_{WMA, w} : R^n \times N^n \rightarrow R$ tal que

$$F_{WMA, w}((a_1, \delta_1), \dots, (a_n, \delta_n)) = \sum_{j=1}^n w_j^k \cdot b_j, \quad k = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

donde $w_j^k \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^n w_j^k = 1$ y b_j es el j -ésimo mayor elemento de las tuplas a_i .

Calculándose los pesos usando la siguiente relación de recurrencia:

$$w_i^k = \begin{cases} w_1 & \text{si } i=1 \\ \frac{w_i \cdot \gamma_i^k + w_i^{k-1}}{t_i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{donde } \gamma_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_i \geq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y } t_i = 1 + \sum_{j=1}^n w_j^k.$$

Es fácil comprobar que este operador es una subclase de la generalización IM-OWA, además, para el caso de que el vector de pesos W se corresponda con los vectores canónicos W_* y W^* se obtienen las funciones F_* y F^* respectivamente.

El uso de este operador se ilustra con la agregación del ejemplo de la sección anterior $a = [(0.1, 3), (0.4, 1), (0.5, 1), (0.7, 4)]$. En este caso la expresión general del cálculo de los pesos es:

$$w_i^N = \frac{1}{1 + w_1} \left(\gamma_i^4 \cdot w_i + \frac{1}{1 + w_1 + w_4} \left(\gamma_i^3 \cdot w_i + \frac{1}{1 + w_1 + w_4} (\gamma_i^2 \cdot w_i + \gamma_i^1 \cdot w_i) \right) \right)$$

con $i = 1, \dots, n$

Omitiendo los cálculos detallados los resultados aplicando los w anteriores son:

$$F_{WMA, w_*}(a) = F_* = 0.1, \quad F_{WMA, w^*}(a) = F^* = 0.7,$$

$$F_{WMA, w_M}(a) = 0.176, F_{WMA, 1/4}(a) = 0.469$$

donde $w_M = (0, 0.2, 0.3, 0.5)$.

II.2.4 Operador de Mayoría Agregada (AM-OWA)

El operador WMA-OWA presenta el inconveniente de que es incapaz de recuperar el operador MA-OWA cuando se selecciona un vector de pesos aritmético $w_i = \frac{1}{n}$. Para poder solucionar este problema se realiza la definición de un nuevo operador que, perteneciendo a la nueva familia de operadores OWA de Importancia sea capaz de aportar las ventajas de los operadores de Mayoría ponderada y no neat. Este operador se denomina de Mayoría Agregada (AM-OWA) y se define como sigue:

Definición. El operador de Mayoría Agregada (AM-OWA) se define como una función $F_{AM, w} : R^n \times N^n \rightarrow R$ tal que

$$F_{AM, w}((a_1, \delta_1), \dots, (a_n, \delta_n)) = \sum_{j=1}^n w_j^k \cdot b_j, \quad k = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

donde $w_j^k \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^n w_j^k = 1$ y b_j es el j -ésimo mayor elemento de las tuplas a_i .

Calculándose los pesos usando la siguiente relación de recurrencia:

$$w_i^k = \begin{cases} w_1 & \text{si } i = 1 \\ \frac{w_i \cdot \gamma_i^k \cdot y_k + w_i^{k-1}}{z_k} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\gamma_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_i \geq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ y z_k, y_k se corresponden con las funciones recursivas siguientes:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \vee \sum_i^n w_i \cdot \gamma_i^k = 0 \\ \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_i^k}{\sum_{j=1}^n \gamma_i^k \cdot w_j} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} n & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } \sum_i^n w_i \cdot \gamma_i^k = 0 \\ 1 + \sum_{j=1}^n \gamma_i^k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La demostración de que los pesos son de suma unitaria se realiza por inducción sobre i . El caso base es trivial por la propia definición. Usando la hipótesis de inducción se obtiene

$$\sum_{j=1}^n w_i^k = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \gamma_j^k \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j^k \right) / \left(\sum_{j=1}^n w_j \gamma_j^k \right) + \sum_{i=1}^n w_i^{k-1}}{1 + \sum_{j=1}^n \gamma_j^k} = 1, \quad \sum_{i=1}^n w_i \gamma_j^k \neq 0$$

o

$$\sum_{j=1}^n w_i^k = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \gamma_j^k + \sum_{i=1}^n w_i^{k-1}}{1} = 1, \quad \sum_{i=1}^n w_i \gamma_j^k \neq 0$$

Por lo que queda demostrado.

Para este nuevo operador, tomando como vector de pesos W_* y W^* se obtienen las funciones F_* y F^* respectivamente. Además en el caso de que se tome como vector correspondiente a la media aritmética $w_i = \frac{1}{n}$ se recupera el operador original de mayoría MA-OWA.

Ejemplo. Si deseamos agregar el conjunto anterior $a = [(0.1, 3), (0.4, 1), (0.5, 1), (0.7, 4)]$. El cálculo de los pesos se realizará conforme a las siguientes expresiones:

$$Z = (1, 3, 3, 2); Y = \left(1, \frac{2}{w_1 + w_4}, \frac{2}{w_1 + w_4}, \frac{1}{w_1} \right)$$

$$w_1^N = \frac{1}{2} \left(1 \cdot w_1 \cdot \frac{1}{w_1} + \frac{1}{3} \left(1 \cdot w_1 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + \frac{1}{3} \left(1 \cdot w_1 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + w_1 \cdot 1 \right) \right) \right),$$

$$w_2^N = \frac{1}{2} \left(0 \cdot w_2 \cdot \frac{1}{w_1} + \frac{1}{3} \left(0 \cdot w_2 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + \frac{1}{3} \left(0 \cdot w_2 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + w_2 \cdot 1 \right) \right) \right),$$

$$w_3^N = \frac{1}{2} \left(0 \cdot w_3 \cdot \frac{1}{w_1} + \frac{1}{3} \left(0 \cdot w_3 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + \frac{1}{3} \left(0 \cdot w_3 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + w_3 \cdot 1 \right) \right) \right),$$

$$w_4^N = \frac{1}{2} \left(0 \cdot w_4 \cdot \frac{1}{w_1} + \frac{1}{3} \left(1 \cdot w_4 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + \frac{1}{3} \left(1 \cdot w_4 \cdot \frac{2}{w_1 + w_4} + w_4 \cdot 1 \right) \right) \right),$$

Obteniéndose según el vector w usado:

$$F_{AM, w_*}(a) = F_* = 0.1, \quad F_{AM, w^*}(a) = F^* = 0.7,$$

$$F_{AM, w_M}(a) = 0.119, \quad F_{AM, 1/4}(a) = F_{MA}(a) = 0.551$$

donde $W_M = (0, 0.2, 0.3, 0.5)$.

II.3 OPERADOR DE MAYORÍA GEOMÉTRICO

Dentro de la toma de decisión en grupo existen procesos donde el operador de agregación más apropiado debe ser geométrico, por ejemplo, en Azcel & Alsina (1983, 1987) se demuestra que el operador apropiado para la agregación de ratios y escalas de consistencia ha de ser la media geométrica en lugar de la media aritmética. Por esta razón en Chiclana et al. (2000) se presenta un nuevo tipo de operador denominado OWG (Ordered Weighted Geometric), el cual combina el vector de pesos del operador OWA junto con la forma de operar de la media geométrica. El objetivo de este nuevo operador es incorporar las ventajas de la

semántica de mayoría del operador OWA a aquellos procesos de decisión donde es necesario aplicar operadores geométricos. No obstante, tal y como se ha mostrado en el primer capítulo, la semántica que se aporta al usar los operadores OWA tradicionales no representa el concepto de mayoría deseado en los sistemas de decisión social (Pasi & Yager, 2002, 2006; Peláez & Doña, 2003a; Peláez et al. 2007).

En esta sección se introduce el operador de Mayoría Multiplicativo, el cual combina la definición general de los procesos de Mayoría con los operadores geométricos OWG, de forma que se pueda incorporar la semántica de estos operadores al proceso de agregación. Además se muestran sus principales propiedades así como un ejemplo de aplicación en un problema de decisión multicriterio con relaciones de preferencia multiplicativa.

II.3.1 Operador OWG (Ordered Weighted Geometric)

Los operadores OWG se presentan como una alternativa a la media geométrica para la agregación de preferencias (Chiclana et al., 2000), definiéndose como sigue:

Definición. El operador OWG es una función $F^G : R^n \rightarrow R$, que tiene asociado un vector de pesos $W = (w_1, \dots, w_n)$, tal que

$$F^G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n (b_j)^{w_i}$$

donde $w_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, donde b_j es el j -ésimo valor mayor de las a_n .

El operador OWG satisface las principales propiedades que lo hacen válido como operador de agregación en los problemas de decisión (Herrera et al., 2003; Xu & Da, 2002). No obstante, su semántica de agregación, al determinarse el vector de pesos a través de la formulación clásica de los operadores OWA, no es adecuada para la toma de decisión social, reproduciéndose los mismos problemas que presenta el operador OWA en entornos aritméticos (Peláez et al., 2005).

II.3.2 Operador de Mayoría Geométrico

Una solución simple a los problemas de distribución en entornos geométricos es sustituir el cálculo de los pesos en el operador OWG por el realizado en los procesos de mayoría, de esta forma se incorpora, a las ventajas del operador OWG en la agregación de preferencias multiplicativas, la semántica de procesos de mayoría. El operador de Mayoría geométrico se define como sigue:

Definición. El operador de mayoría geométrico (MA-OWG) es una función $F_{MAG} : R^n \times N^n \rightarrow R$ definida como

$$F^{MAG}((a_1, \delta_1), (a_2, \delta_2), \dots, (a_n, \delta_1)) = \prod_{j=1}^n (b_j)^{w_j^k} = \prod_{i=1}^n (b_i)^{f_i(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

donde $w_j^k \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^n w_j^k = 1$ y b_j es el j -ésimo mayor elemento de los a_i donde se ha realizado la conversión del vector original con repeticiones a un vector de tuplas (a_i, δ_i) donde el primer elemento representa el valor a agregar sin repeticiones y el segundo elemento su cardinalidad.

Los pesos del operador se determinan a través de las funciones definidas anteriormente para los procesos de mayoría. Como por ejemplo la generalización anterior correspondiente al operador AM-OWA:

$$w_i^k = \begin{cases} w_1 & \text{si } i=1 \\ \frac{w_i \cdot \gamma_i^k \cdot y_k + w_i^{k-1}}{z_k} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las principales propiedades de este nuevo operador son (para simplificar la notación en las demostraciones, la tupla (a_i, δ_i) se representará únicamente por a_i):

Propiedad 1. El MA-OWG es un operador *or-and*

$$F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F^{MAG}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Es decir, los el operador está acotado en sus límites superior e inferior por las funciones F_* y F^* . Siendo recuperables el valor de estas a través del vector que se use con el operador. De lo que se deduce que

$$\text{Min}(a_i) \leq F^{MAG}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_i)$$

Propiedad 2. Conmutatividad.

El operador MA-OWG se puede considerar conmutativo. Si tomamos el conjunto a agregar $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ y realizamos una permutación de sus elementos $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$. Entonces

$$F^{MAG}(a_1, a_2, \dots, a_n) = F^{MAG}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Propiedad 3. Monotonía.

Una tercera característica al operador es la monotonía. Sean a_i y c_i con $i=1, \dots, n$ conjuntos a agregar, tales que para cada i , $c_i \leq a_i$. Entonces

$$F^{MAG}(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq F^{MAG}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Donde los valores de importancia son los mismos para ambos conjuntos.

Propiedad 4. Idempotencia.

Otra característica relacionada con este operador es la idempotencia. Si $a_i = a$ para toda $i=1, \dots, n$, entonces

$$F^{MAG}(a, a, \dots, a) = a$$

Propiedad 5. El operador es equivalente a la media geométrica cuando todos los elementos poseen la misma importancia. En ese caso $w_i = 1/n \forall i$.

$$F^{MAG}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{j=1}^n (b_i)^{w_j} = \prod_{i=1}^n (a_i)^{\frac{1}{n}} = GM(a_1, a_2, \dots, a_n), \delta_i = \delta_j \forall i, j$$

Propiedad 6. Incremento constante.

Si todos los valores de la agregación se incrementan por una constante k , el resultado de la agregación MA-OWG se incrementa también por esa misma constante k .

$$\prod_{i=1}^n (k \cdot a_i)^{w_i} = \prod_{i=1}^n (k^{w_i} \cdot a_i^{w_i}) = k \cdot F^{MAG}$$

Las propiedades que se verifican a continuación son de especial interés para la aplicación de este nuevo operador en problemas de decisión multicriterio, donde se usan relaciones de preferencias multiplicativas, como son, por ejemplo, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP).

Propiedad 7. Reciprocidad.

El recíproco del operador MA-OWG es igual al resultado de aplicar MA-OWG al recíproco de los valores a agregar.

$$\frac{1}{F^{MAG}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (a_i)^{w_i}} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i}\right)^{w_i}$$

por lo que

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, M^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdots M^m = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^k & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde $a_{ii}^r = 1$, $a_{ij}^r = \frac{1}{a_{ji}^r}$ y la función δ_i se calcula a través de la distancia entre

matrices. Entonces, si $a_{ij}^{F^{MAG}} = F^{MAG}(a_{ij}^1, a_{ij}^2, \dots, a_{ij}^m) = \prod_{k=1}^m (a_{ij}^k)^{w_k}$ entonces

$$a_{ij}^{F^{MAG}} = \prod_{r=1}^m (a_{ij}^r)^{w_r} = \prod_{r=1}^m \left(\frac{1}{a_{ji}^r}\right)^{w_r} = \frac{1}{\prod_{r=1}^m (a_{ji}^r)^{w_r}} = \frac{1}{a_{ji}^{F^{MAG}}}$$

Propiedad 8. Consistencia.

La aplicación del operador MA-OWG sobre un conjunto de elementos consistentes, continua siendo consistente.

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, M^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdots M^m = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^m & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde $a_{ii}^r = 1$, $a_{ij}^r \cdot a_{jk}^r = a_{ik}^r$, $\forall i, j, k, r$ y la función δ_i se calcula usando la distancia

entre matrices. Entonces, si $a_{ij}^{F^{MM}} = F^{MM}(a_{ij}^1, a_{ij}^2, \dots, a_{ij}^m) = \prod_{k=1}^m (a_{ij}^{\sigma(k)})^{w_k}$ se cumple

$$a_{ij}^{F^{MM}} = \prod_{r=1}^m (a_{ij}^{\sigma(r)})^{w_r}; a_{jk}^{F^{MM}} = \prod_{r=1}^m (a_{jk}^{\sigma(r)})^{w_r}; a_{ik}^{F^{MM}} = \prod_{r=1}^m (a_{ik}^{\sigma(r)})^{w_r}$$

$$a_{ij}^{F^{MM}} \cdot a_{jk}^{F^{MM}} = \prod_{r=1}^m (a_{ij}^{\sigma(r)})^{w_r} \cdot \prod_{r=1}^m (a_{jk}^{\sigma(r)})^{w_r} = \prod_{r=1}^m (a_{ij}^{\sigma(r)} \cdot a_{jk}^{\sigma(r)})^{w_r} = \prod_{r=1}^m (a_{ik}^{\sigma(r)})^{w_r} = a_{ik}^{F^{MM}}$$

Ejemplo. Un comité de expertos formados por seis individuos, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, expresa su opinión sobre un conjunto de tres alternativas, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Dando lugar a las siguientes relaciones de preferencia:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1/2 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1/2 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1/2 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para este problema se va a aplicar el operador MA-OWG usando una función de distancia para las matrices con $x = 0$. Los grupos resultantes son $AG^1 = A^1, A^2, A^3$; $AG^2 = A^5, A^6$; y $AG^3 = A^4$, con cardinalidades 3, 2 y 1 respectivamente.

1. Fase de Agregación.

Las preferencias colectivas obtenidas en esta fase son las siguientes:

$$M^C = \begin{bmatrix} 1 & 2.37 & 4.33 \\ 1/2.37 & 1 & 3.84 \\ 1/4.33 & 1/3.84 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los valores $a_{12}^C, a_{13}^C, a_{21}^C$ se calcularon como sigue

$$a_{12}^C = F^{MAG}(2, 3, 9) = 2^{13/18} \cdot 3^{4/18} \cdot 9^{1/18} = 2.37$$

$$a_{13}^C = F^{MAG}(7,1,3) = 7^{13/18} \cdot 1^{13/18} \cdot 3^{1/18} = 4.33$$

$$a_{23}^C = F^{MAG}(5,3,1/3) = 5^{13/18} \cdot 3^{13/18} \cdot 1/3^{1/18} = 3.84$$

2. Fase de Explotación.

$$x_1 = F^{MAG}(1, 2.37, 4.33) = 2.17$$

$$x_2 = F^{MAG}(1/2.37, 1, 3.84) = 1.17$$

$$x_3 = F^{MAG}(1/4.33, 1/3.84, 1) = 0.391$$

$$Sol = \max \{x_1 = 2.17; x_2 = 1.17; x_3 = 0.391\} = x_1.$$

II.4 CUANTIFICACIÓN DE LOS OPERADORES DE MAYORÍA

Los procesos de mayoría surgen por la necesidad de obtener valores de agregación que sean representativos de la mayoría de los elementos a agregar sin omisión de las minorías, ya que los operadores de agregación más comúnmente utilizados tienden a acentuar la opinión de las minorías a expensas de las mayorías, generando valores de agregación que no son válidos para los problemas de toma de decisión en grupo (Pasi & Yager 2002, 2006; Peláez et al. 2007). Estos procesos se han definido inicialmente como operadores neat OWA realizando el proceso de agregación sin hacer uso de cuantificadores lingüísticos para luego generalizarlos y extenderlos a otras familias de operadores y a entornos geométricos.

Frente a la ventaja de incluir el concepto de mayoría en la agregación de los procesos descritos en este capítulo, se encuentra el hecho de que la definición realizada produce una semántica en la que se consideran *todos* los elementos involucrados en la agregación, siendo imposible modelar conceptos borrosos como *muchos* o *al menos el 80%*, en los que introduce información lingüística. Para poder resolver este inconveniente, es necesario introducir cuantificadores lingüísticos dentro del proceso de agregación de forma que se pueden modelar este tipo de semánticas.

En la lógica borrosa, el concepto de cuantificador lingüístico realiza una generalización de los cuantificadores de la lógica clásica (*para todo* y *existe*) permitiendo realizar referencias a cantidades variables de elementos dentro del dominio de discurso, tanto de forma crisp, como *al menos k* o *la mitad*; o de forma borrosa, por ejemplo *muchos*, *algunos* o *aproximadamente k* (Zadeh, 1983).

Los cuantificadores se pueden dividir en dos grandes grupos: absolutos y proporcionales.

Los cuantificadores absolutos, tales como *sobre 7*, *casi 5*, etc. se definen como subconjuntos borrosos con una función de pertenencia $\mu_Q : R^+ \rightarrow [0,1]$, donde $\forall x \in R^+ ; \mu_Q(x)$ indica el grado con que la cantidad x satisface el concepto Q .

Los cuantificadores proporcionales como *muchos* o *sobre el 70%* se definen como subconjuntos borrosos en el intervalo cero-uno: $\mu_Q : [0,1] \rightarrow [0,1]$, donde $\forall x \in [0,1]$, $\mu_Q(x)$ indica el grado con que la proporción x satisface el concepto Q .

En la definición de Zadeh (Zadeh, 1983) de cuantificadores borrosos, el concepto de cardinalidad del subconjunto borroso, definido como Σ -count, es central.

En los métodos de toma de decisión borrosos, el concepto de mayoría se modela generalmente a través del uso de cuantificadores lingüísticos, tales como *al menos el 80%* y *muchos*.

Formalmente un cuantificador lingüístico es un subconjunto borroso dentro de un dominio numérico, donde la semántica de este subconjunto borroso se describe a través del uso de una función de pertenencia la cual describe la compatibilidad de un valor absoluto o porcentual con respecto al concepto expresado por el cuantificador lingüístico (Barwise & Cooper R., 1981; Keenan & Westerstal, 1997).

En la toma de decisión social, los cuantificadores lingüísticos se pueden ver como una estrategia de fusión que guía el proceso de agregación de las opiniones de los expertos, indicando la cantidad de elementos a considerar en el conjunto de referencia. El resultado de esta agregación deberá representar la semántica del cuantificador lingüístico.

En esta sección se presentan los operadores de mayoría cuantificada que hacen uso de cuantificadores lingüísticos para guiar el proceso de agregación. Estos operadores usan dos estrategias de cuantificación junto con un proceso de normalización cuantificada de pesos. La primera estrategia de fusión considera la aplicación del cuantificador de forma general sobre el total de los elementos del conjunto de referencia; mientras que la segunda hace uso del concepto de grupos de mayoría. Así mismo, la nueva técnica de normalización que incorporan estos

operadores, denominada Q -Normalización, introduce el concepto representado por el cuantificador lingüístico en el proceso de normalización de los pesos.

II.4.1 Estrategias de Cuantificación

Usualmente los cuantificadores realizan una función de corte sobre el conjunto de valores a agregar. En esta sección se proponen dos estrategias de cuantificación aplicable sobre operadores no cuantificados para llevar a cabo dicho corte y obtener una cuantificación que refleje la semántica expresada por Q .

II.4.1.1 Cuantificación Individual

La cuantificación individual consiste en indicar el grado con que cada miembro del conjunto de valores representa el concepto expresado por el cuantificador. Para ello, esta estrategia aplica la semántica del cuantificador directamente sobre el peso individual de cada elemento de la agregación, donde el peso ha sido previamente calculado con un operador de agregación. Esta estrategia queda definida por la siguiente expresión:

$$w_i^Q = w_i^N \cdot Q\left(\frac{i}{n}\right) + \lambda$$

donde w_i^N es el peso individual del elemento obtenido con un operador, Q es el cuantificador y λ es la Q -Normalización que será presentada en la próxima sección.

La figura II.2 muestra un ejemplo de aplicación de la cuantificación individual sobre un conjunto de valores a agregar ordenados de menor a mayor importancia

en función de la cardinalidad de cada elemento. Los valores por encima de la línea no son considerados en la agregación.

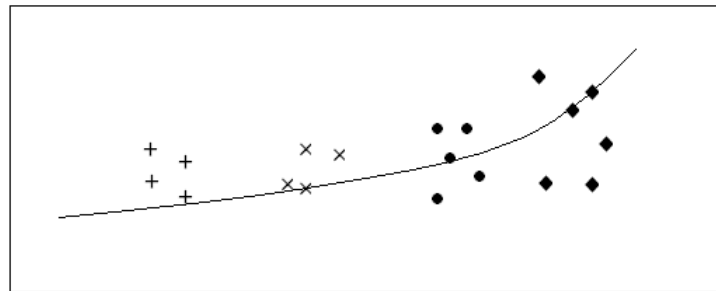


Figura 2.2. Representación gráfica del corte del cuantificador con la semántica de cuantificación individual.

II.4.1.2 Cuantificación en Grupo

Desde un punto de vista social existen problemas de toma de decisión en grupo donde se debe cumplir la premisa que todos los grupos de opiniones estén representados por al menos un individuo. Como muestra la figura II.2 esta premisa no siempre se cumple con la cuantificación individual ya que existen grupos de opinión que son eliminados del proceso de decisión. Para solucionar este problema se propone la cuantificación en grupo, la cual siempre garantiza dicha condición.

En la cuantificación en grupo el cuantificador se aplica sobre cada grupo de mayoría produciendo un nuevo grupo con una cardinalidad que representa la semántica expresada por Q . En esta estrategia los pesos se calculan para cada grupo dividiendo el peso original de cada elemento por su cardinalidad; y a continuación se aplica el cuantificador sobre el grupo. El nuevo vector de pesos cuantificados se calcula con la siguiente expresión:

$$w_i^Q = \frac{w_i}{\delta_i} \cdot \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right) + \lambda$$

donde Q es el cuantificador, n es el número de grupos de mayoría, δ_i es la cardinalidad del grupo i ; y λ es la Q -Normalización que será presentada en la próxima sección.

Esta estrategia de cuantificación elimina la exclusión de grupos de elementos a agregar, de manera que se obtiene una representación de la mayoría pero al mismo tiempo quedan representadas todas las minorías. La figura II.3 muestra un ejemplo de aplicación de la cuantificación en grupo sobre un conjunto de valores a agregar. Los valores por encima de la línea en cada grupo no son considerados en la agregación.

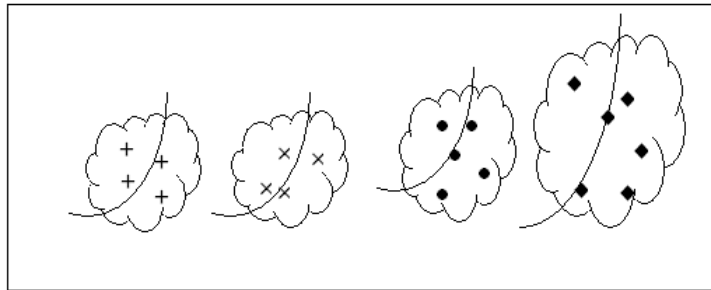


Figura 2.3. Representación gráfica del corte del cuantificador con la semántica de cuantificación en grupo.

II.4.2 Normalización Cuantificada: Q -Normalización.

Las estrategias de cuantificación de mayoría se basan en la aplicación del cuantificador sobre los pesos calculados con un operador de agregación. Cada

elemento de la agregación ve modificado su peso por la cantidad expresada por la semántica del cuantificador, de manera que $\sum_{i=1}^n w_i \neq 1$, es decir, los pesos dejan de estar normalizados. Por lo tanto es necesario un proceso de normalización de pesos que haga que $w_i \in [0,1]$; $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, y al mismo tiempo incorpore la semántica del cuantificador en dicha normalización.

Para solucionar este problema proponemos la Normalización Cuantificada o *Q*-Normalización. El proceso se realiza como sigue: Inicialmente se parte de un conjunto de pesos normalizados obtenidos tras la aplicación del operador de agregación. Estos pesos se pueden representar como un cuadrado normalizado de área la unidad (figura II.4). En este cuadrado cada peso *i* se representa con un rectángulo de área igual a su valor (altura 1 y base w_i).

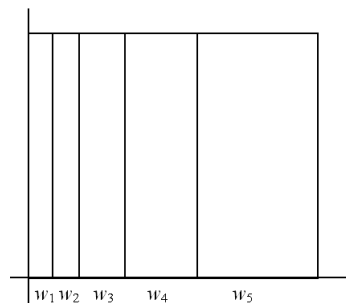


Figura 2.4. Representación gráfica de los pesos w_i resultantes de aplicar el operador de agregación.

Cuando aplicamos el cuantificador *q* sobre cada peso *i*, se produce una variación en el área de cada peso igual a $w_i \cdot q_i$ que se representa como un cambio en su altura, por lo que el área total a considerar pasa a ser $\rho = 1 - \varepsilon$ (figura II.5).

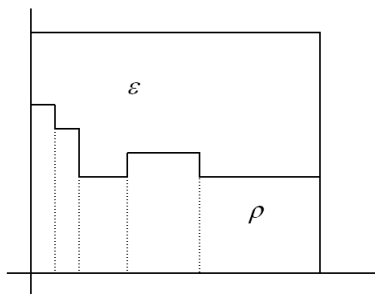


Figura 2.5. Representación gráfica de los pesos w_i tras aplicar los cuantificadores.

En este punto, la Q -normalización reparte el área ε entre todos los rectángulos w_i que conforman el cuadrado en función de su altura (valor q_i), en lugar de usar como referencia el área de cada rectángulo con respecto al nuevo área total ρ , tal como lo haría la normalización clásica (dividir cada valor por la suma total de todos los valores). De esta forma (figura II.6) se favorecen aquellos elementos que aún siendo pequeños dentro de ρ son considerados en mayor grado por el cuantificador usado (tienen mayor altura).

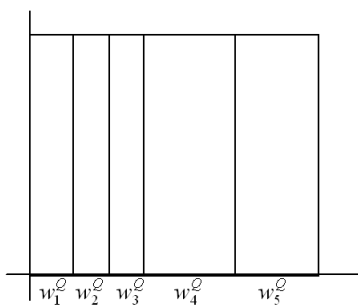


Figura 2.6. Representación gráfica de los pesos w_i^Q normalizados.

Formalmente la Q -normalización queda como sigue:

Definición: Sea el vector de pesos $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ y el cuantificador para cada elemento $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ donde $0 \leq q_i \leq 1$ y, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ por lo que se establece:

$$\rho = \sum_{i=1}^n w_i \cdot q_i \leq 1$$

Si $\varepsilon = 1 - \rho$, entonces $\frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n q_i}$ es la cantidad a ser añadida a cada elemento en la

proporción expresada por q_i . Luego se demuestra que la Q -Normalización es:

$$\sum_{i=1}^n (w_i \cdot q_i + \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n q_i} \cdot q_i) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot q_i + \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n q_i} \cdot \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n w_i \cdot q_i + \varepsilon = \rho + 1 - \rho = 1$$

Como se observa en su definición, la Q -normalización modifica cada peso incrementándolo en función del cuantificador usado en cada caso con respecto a los demás elementos cuantificados, añadiendo, en función de este valor, a cada peso la cantidad ε que corresponda. De esta forma, se obtiene una normalización que se integra en el proceso de agregación reflejando la semántica del cuantificador.

II.4.3 Operadores de Mayoría Cuantificada QMA-OWA

En las secciones previas se han mostrado dos estrategias de cuantificación y un nuevo proceso de normalización usando cuantificadores lingüísticos. La unión de

todo ello crea los denominados operadores de mayoría cuantificados QMA-OWA. A continuación se muestran los operadores QMA-OWA, cómo se calculan sus pesos y se comparan con otros operadores.

II.4.3.1. Operador QMA-OWA Individual

El operador de mayoría usando el modelo de cuantificación individual se define como sigue:

$$F_{Q_iMA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i^Q \cdot b_i = \sum_{i=1}^n f_i \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot b_i$$

donde $w_i^Q \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^n w_i^Q = 1$ y b_i es el i -ésimo elemento de a_1, \dots, a_n ordenado en orden ascendente según las cardinalidades.

Los pesos del operador QMA-OWA con estrategia individual se calculan como sigue.

$$w_i^Q = w_i^N \cdot Q\left(\frac{i}{n}\right) + \left[Q\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1 - \sum_{i=1}^n \left(w_i^N \cdot Q\left(\frac{i}{n}\right) \right)}{\sum_{i=1}^n Q\left(\frac{i}{n}\right)} \right]$$

siendo w_i^N el peso individual del elemento obtenido con el operador MA-OWA, Q es el cuantificador, y la expresión comprendida entre corchetes se corresponde con la Q -Normalización.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación de este nuevo operador, se comparan sus resultados con otros operadores y finalmente se analizan los valores obtenidos.

Ejemplo. Sean los valores de opinión [0 0 0.7 0.8 1 1 1] que han sido emitidos por siete expertos. Se desea obtener una opinión que sea representativa de la mayoría utilizando el cuantificador *muchos* definido en la figura II.6.

Solución 1. Operador OWA con el cuantificador *muchos*.

Conjunto de valores ordenados:

$$B = [1 \ 1 \ 1 \ 0.8 \ 0.7 \ 0 \ 0]$$

Vector de pesos:

$$W = [0 \ 0 \ 0.057 \ 0.285 \ 0.285 \ 0.285 \ 0.088]$$

Solución

$$OWA = \sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i = 0.485$$

Solución 2. Operador MA-OWA.

Se consideran 4 elementos a agregar $B = [0.7 \ 0.8 \ 0 \ 1]$ con cardinalidades [1 1 2 3] respectivamente. El vector de pesos ordenado es:

$$W = [0.708 \ 0.208 \ 0.042 \ 0.042]$$

luego

$$\text{MA-OWA} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i = 0.771$$

Solución 3. Operador QMA-OWA cuantificado con *muchos* con estrategia individual.

En primer lugar obtenemos los pesos de los elementos a agregar con el operador MA-OWA: $W = [0.708 \ 0.042 \ 0.042 \ 0.208]$; a continuación el peso de cada elemento debe ser dividido por el número de elementos del grupo al que pertenece, para considerar cada elemento de forma individual. Los nuevos valores para los conjuntos de elementos y pesos B y W son:

$$B_N = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0.8 \ 0.7]$$

$$W_N = [0.708/3 \ 0.708/3 \ 0.708/3 \ 0.208/2 \ 0.208/2 \ 0.041 \ 0.041].$$

El vector del cuantificador Q sería:

$$Q = [0 \ 0 \ 0.057 \ 0.343 \ 0.629 \ 0.914 \ 1]$$

Entonces

$$w_1^Q = 0.042 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1-0.642}{2.943} = 0$$

$$w_2^Q = 0.042 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1-0.642}{2.943} = 0$$

$$w_3^Q = 0.104 \cdot 0.057 + 0.057 \cdot \frac{1-0.642}{2.943} = 0.013$$

$$w_4^Q = 0.104 \cdot 0.343 + 0.343 \cdot \frac{1-0.642}{2.943} = 0.077$$

$$w_5^Q = 0.236 \cdot 0.629 + 0.629 \cdot \frac{1-0.642}{2.943} = 0.225$$

$$w_6^Q = 0.236 \cdot 0.914 + 0.914 \cdot \frac{1-0.642}{2.943} = 0.327$$

$$w_7^Q = 0.236 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1-0.642}{2.943} = 0.358$$

Luego el vector de pesos cuantificado es

$$W^Q = [0 \ 0 \ 0.013 \ 0.077 \ 0.225 \ 0.327 \ 0.358]$$

Resultando

$$QMA-OWA-I = \sum_{i=1}^n w_i^Q \cdot b_i = 0.910$$

En la figura II.7 se muestran los resultados de los anteriores operadores.

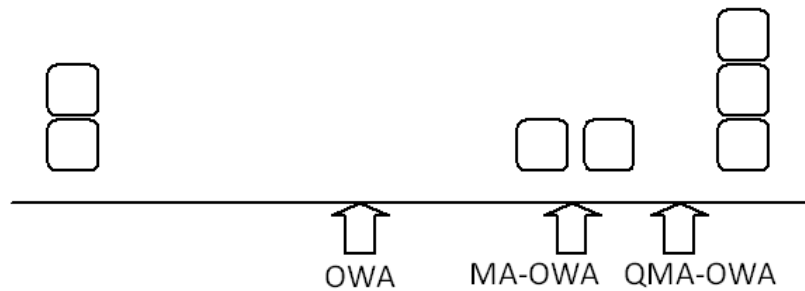


Figura 2.7. Representación gráfica de las soluciones obtenidas.

Análisis de los Resultados Obtenidos

Operador OWA

Como se ha mostrado anteriormente el operador OWA genera un valor de agregación igual a 0.485. Este valor no lo podemos considerar representativo del concepto de mayoría del cuantificador, debido a que más del 70% de los elementos son mayores que 0.7, mientras que tan solo un 28% es menor o igual que 0.485. Esto se debe a que en este tipo de agregación la semántica del cuantificador se ve afectada de forma significativa por el componente no lineal del operador de agregación, es decir, por la forma en que los argumentos se reordenan.

En los operadores OWA, después del paso de reordenación, si los valores representativos se encuentran a la izquierda del vector, se consideran de forma nula o de forma mucho menor que si se encontraran en su parte derecha. Incluso cambiando la forma de ordenación el problema en la distribución de los pesos continuaría, ya que al medir un valor de incremento los pesos pueden decrecer en las últimas posiciones. Esto hace que la solución obtenida con el operador OWA se corresponda con un grado de satisfacción *Q de los valores son totalmente*

satisfechos, mientras que un operador con una semántica de mayoría debe producir un valor que sea representativo de *Q de los valores más relevantes en el conjunto de referencia*.

Operador MA-OWA

La solución que se ha obtenido aplicando este tipo de operador, 0.771, es un valor representativo del concepto de mayoría. Esta definición se corresponde con una semántica de mayoría en donde se consideran *todos* los elementos, sin embargo, no permite modelar conceptos de mayoría como *muchos*, *al menos el 80%*, etc, para lo que sería necesario introducir el uso de cuantificadores lingüísticos en la agregación.

Operador QMA-OWA Cuantificado con Estrategia Individual

La solución que se ha obtenido con este operador, 0.91, sí es un valor que representa la semántica de mayoría, donde se han considerado para agregar *Q* de los valores más relevantes en el conjunto de referencia. En este ejemplo se ha cuantificado la mayoría a través del cuantificador lingüístico *muchos*.

Este operador realiza un corte de los elementos a agregar en función de su relevancia, considerando, en este ejemplo, más relevantes aquellos elementos que más se repiten, es decir de mayor cardinalidad (figura II.2).

II.4.3.2 Operador QMA-OWA Grupo

Como se ha mostrado en el ejemplo anterior la cuantificación individual puede excluir grupos de opinión en los procesos de toma de decisión en grupo, pudiendo producir en dichos casos problemas donde los expertos no queden satisfechos con

el resultado final al no estar representadas todas las opiniones. Para resolver este problema se propone el operador de mayoría cuantificada QMA-OWA con estrategia de grupo. En este caso el operador se define como sigue:

$$F_{Q_GMA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i^Q \cdot b_i = \sum_{i=1}^n f_i \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot b_i$$

donde $w_i^Q \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^n w_i^Q = 1$ y b_i es el i -ésimo elemento de a_1, \dots, a_n ordenado en orden ascendente según las cardinalidades.

Los pesos del operador QMA-OWA con estrategia de grupo se calculan como sigue.

$$w_i^Q = \frac{w_i}{\delta_i} \cdot \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right) + \left[\sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right) \cdot \frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\delta_i} \cdot \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\delta_i} Q\left(\frac{j}{\delta_i}\right)} \right]$$

siendo w_i^N el peso individual del elemento obtenido con el operador MA-OWA, Q es el cuantificador, y la expresión comprendida entre corchetes es la Q -Normalización.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación de este nuevo operador, se comparan sus resultados con otros operadores y, finalmente, se analizan los valores obtenidos.

Ejemplo: Sea $B = [0.7 \ 0.8 \ 0 \ 1]$ con cardinalidad $[1 \ 1 \ 2 \ 3]$ respectivamente. Se desea obtener una opinión que sea representativa de la mayoría utilizando el cuantificador definido en la figura II.2.

El vector de pesos de mayoría es $W = [0.042 \ 0.042 \ 0.208 \ 0.708]$. Los vectores Q para grupos con cardinalidad 1, 2 y 3 respectivamente son: $[1]$; $[0.2 \ 1]$; $[0 \ 0.533 \ 1]$, entonces:

$$w_1^Q = \frac{0.042}{1} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1-0.570}{4.733} = 0.132;$$

$$w_2^Q = \frac{0.042}{1} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1-0.570}{4.733} = 0.132;$$

$$w_3^Q = \frac{0.208}{2} \cdot 1.2 + 1.2 \cdot \frac{1-0.570}{4.733} = 0.234 ;$$

$$w_4^Q = \frac{0.708}{3} \cdot 1.533 + 1.533 \cdot \frac{1-0.570}{4.733} = 0.501$$

Obteniéndose $W^Q = [0.132 \ 0.132 \ 0.234 \ 0.501]$

Resultado

$$QMA-OWA = \sum_{i=1}^n w_i^Q \cdot b_i = 0.7$$

Gráficamente los resultados obtenidos serían los que muestra la figura II.8.

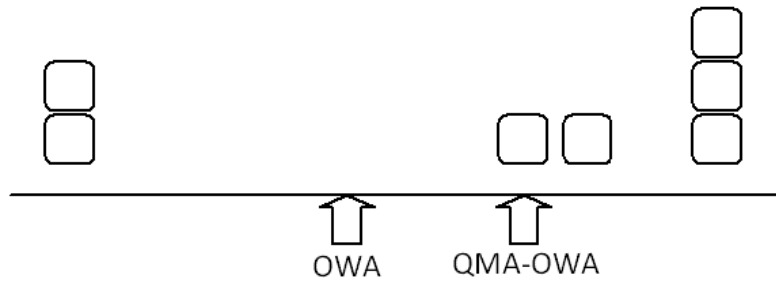


Figura 2.8. Representación gráfica de las soluciones obtenidas.

Análisis de los Resultados Obtenidos

Operador OWA y MA-OWA

Los resultados que se obtienen con el operador OWA y MA-OWA son los mismos que se obtuvieron en la sección anterior (0.485, 0.771) respectivamente, siendo las conclusiones del análisis similares a la realizadas la sección anterior.

Operador QMA-OWA Cuantificado con Estrategia de Grupo

La solución que se ha obtenido con este operador, 0.7, también es un valor que representa la semántica de mayoría, donde se han considerado para agregar Q de los valores más relevantes en el conjunto de referencia, y donde todos los grupos están representados (figura II.3).

Usando el operador QMA-OWA con estrategia de grupo se obtiene, como se ha mostrado, un valor representativo de la mayoría, pero al mismo tiempo se está cumpliendo la premisa de que todos los grupos de opinión estén representados en el proceso de agregación.

Capítulo 3 Procesos de Decisión

Los procesos de decisión son tareas comunes dentro de la actividad humana que consisten en hallar la mejor opción dentro de un conjunto de soluciones factibles a un problema dado. Muchos de estos procesos de decisión, en la vida real, se realizan sin un conocimiento total y completo de las posibles opciones a elegir, así como de las consecuencias que pueden producir las distintas acciones después de tomar una decisión. En estos casos es normal que se produzca una importante carencia de precisión en los resultados. Este desconocimiento, así como la imprecisión que presentan las técnicas basadas en la teoría de la probabilidad, hace que cada vez sea más necesario el uso de otras técnicas, como por ejemplo la lógica borrosa.

La teoría de los conjuntos borrosos aplicada a los procesos de decisión en grupo obtiene resultados acordes con el comportamiento y forma de razonar del ser humano. Además, incorpora un mayor grado de consistencia o inteligencia

humana a los distintos modelos de toma de decisión. Se han propuesto distintos modelos de decisión, clasificados atendiendo al número de estados que se producen durante el proceso de decisión (Kickert, 1978). Este trabajo se centra en los modelos borrosos de un único nivel en la toma de decisión, como por ejemplo, los modelos de toma de decisión multipersonal aplicados a la teoría de decisión en grupo.

Un proceso de toma de decisión en grupo se define como una situación en la que (i) hay dos o más individuos, cada uno de ellos caracterizado por sus propias percepciones, aptitudes, motivaciones y personalidad, (ii) se reconoce la existencia de un problema común, y (iii) se desea encontrar una solución colectiva a dicho problema.

En un entorno borroso, un problema de toma de decisión en grupo se expresa como sigue: Se asume que existe un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y un conjunto finito de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, donde cada experto $e_k \in E$ expresa su relación de preferencia en X , por ejemplo, $p_k \subset X \times X$, y $\mu_{p_k}(x_i, x_j) \in [0, 1]$ indica el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j .

De forma general, un individuo suele poseer una noción imprecisa sobre el grado de preferencia de una alternativa x_i sobre otra x_j y no es capaz de expresarla con un valor numérico exacto. En estos casos, para poder realizar una aproximación más fiel a la realidad, se usan expresiones lingüísticas, más naturales y cercanas al proceso humano (Delgado et al., 1993). En este caso, a los individuos o decisores se les presenta una escala de certeza (de valores de asociación lingüísticos), para que puedan describir el grado de certeza de una preferencia. En

este entorno se tendrán relaciones de preferencia lingüística para expresar opiniones individuales.

Por otro lado, asumido el conjunto de alternativas o de decisión, se tienen dos formas diferentes de llevar a cabo el esquema de decisión. La primera opción, denominada *algebraica*, consiste en establecer un proceso de selección en grupo con el que obtener un esquema de decisión como solución para el problema de toma de decisión en grupo. La segunda opción, denominada *topológica*, consiste en establecer una medida de distancia entre los diferentes esquemas de decisión (Carlsson et al. 1992, Nurmi & Kacprzyk, 1991).

Independientemente del esquema de decisión que se utilice, el operador de agregación usado desempeña un papel principal dentro del proceso. En este sentido, los operadores OWA se han mostrado como una de las opciones más eficaces para su uso en los problemas de toma de decisión en grupo (Herrera et al. ,1996; Pasi & Yager, 2006; Peláez & Doña, 2006; Llamazares, 2007; Wu & Chen, 2007), tanto por las propiedades específicas que satisfacen (Yager, 1988; Liu, 2006; Amin 2007) como por la posibilidad de representar conceptos borrosos a través de la semántica de agregación de sus operadores y su combinación con cuantificadores lingüísticos (Pasi & Yager 2006; Peláez et al. 2007).

En este capítulo se proponen varios procesos de decisión en grupo en entornos lingüísticos que usan el modelo directo como método de resolución y la información generada a través de un proceso de agregación de mayoría lingüística. Además, se estudian las propiedades y los axiomas del operador de mayoría usado, mostrando la forma lógica en que se realiza la agregación, así como la idoneidad de la aplicación del operador para resolver los problemas de toma de decisión en grupo con relaciones de preferencia lingüística individuales.

Finalmente se presenta dos nuevas técnicas de agregación aplicadas al enfoque modelo directo para el nivel de grupo o gradación.

III.1 PREFERENCIA LINGÜÍSTICA EN LOS PROCESOS DE TOMA DE DECISIÓN EN GRUPO

Sea X un conjunto de alternativas sobre el que se definen las preferencias de un decisor. Entonces, según Tanino (1988), la preferencia borrosa se puede representar como:

Un conjunto de selección borroso que representa totalmente las aptitudes de preferencia del decisor. Este conjunto viene descrito por un subconjunto de X , por ejemplo, por una función de preferencia μ en X , cuyo valor $\mu(x)$ representa el grado de preferencia de x , o el grado con el que x es considerada como una alternativa deseable.

Una función de utilidad borrosa. Descrita como una función de suavizado (o mapping) borroso v , que asocia a un subconjunto borroso del espacio de valores útiles (generalmente el espacio de los números reales R) con cada alternativa x , $v : X \times R \rightarrow [0,1]$, donde $v(x, t)$ indica el grado de igualdad entre el valor de utilidad de x y el valor representado por t .

Una función de preferencia borrosa. Descrita como una función binaria de R en X , por ejemplo, un conjunto borroso en $X \times X$, caracterizado por una función de pertenencia $\mu_R : X \times X \rightarrow [0,1]$, donde (x_i, x_j) indica el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre x_j .

El uso de la relación de preferencia borrosa en la toma de decisión para expresar la opinión de los expertos sobre un conjunto de alternativas con respecto a un cierto criterio, es de gran utilidad en el modelado de los procesos de decisión. Así mismo, se presenta como un método natural cuando se desea agregar las preferencias de los expertos en un único grupo, es decir, en los procesos de toma de decisión en grupo.

Como se ha mencionado, en muchos casos los expertos no son capaces de estimar de forma concreta, en valores exactos numéricos, el grado de sus preferencias. Es en estos casos cuando el uso de etiquetas lingüísticas se hace necesario.

III.1.1 Etiquetas Lingüísticas. Semántica y Propiedades

En Bonissone & Decker (1986) se introducen y estudian los conjuntos de etiquetas lingüísticas de cardinalidad impar. En estos conjuntos, la etiqueta central representa la probabilidad de “*aproximadamente 0.5*” y el resto de etiquetas se distribuyen simétricamente alrededor de ésta, situándose el límite óptimo de granularidad en 11, no obstante, se establece un margen de nueve más-menos 2 etiquetas según el grado de sensibilidad que se disponga. La semántica de las etiquetas viene dada por números borrosos definidos en el intervalo $[0, 1]$ y descritos por una función de pertenencia. Como los valores emitidos de forma lingüística son aproximaciones dadas por los individuos, posibles formas de construcción son el uso de funciones triangulares, gaussianas y trapezoidales. En este trabajo se usará la representación mediante una función lineal trapezoidal que se define por una 4-tupla $(a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)$, donde los dos primeros parámetros representan el intervalo en el que el valor de pertenencia es 1.0; y el tercer y

cuarto parámetro representan la amplitud tanto por la izquierda como por la derecha respectivamente de la distribución.

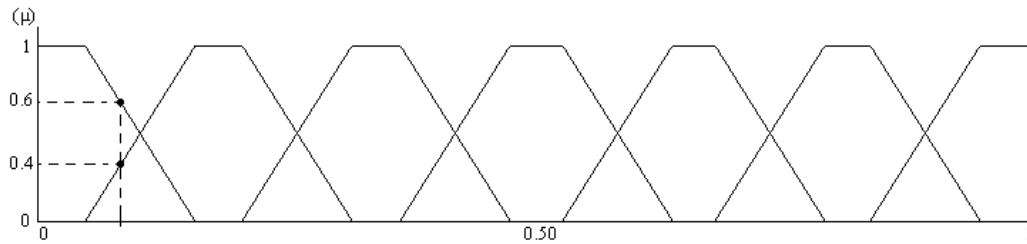


Figura 3.1. Representación gráfica de un conjunto de etiquetas trapezoidales.

En adelante, se considera un conjunto finito y totalmente ordenado de etiquetas $S = \{s_i\}$, $i \in H = \{0, \dots, T\}$, donde de forma general, la cardinalidad de H es la establecida en (Bonissone & Decker, 1986). Cada etiqueta s_i representa un posible valor real para la variable lingüística, por ejemplo, un valor borroso de propiedad o restricción dentro de $[0, 1]$, con las siguientes propiedades:

El conjunto es ordenado: $s_i \geq s_j$ si $i \geq j$.

Existe el operador de negación: $Neg(s_i) = s_j$ tal que $j = T - i$.

El operador máximo se define como: $max(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$.

El operador mínimo se define como: $min(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$.

Asumiendo el espacio de trabajo lingüístico y un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, las preferencias que expresan los expertos sobre X se define como un relación $n \times n$ de preferencia lingüística R , tal que $R = (r_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$,

donde $r_{ij} \in S$ indica el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre x_j , valorado lingüísticamente como sigue:

$$s_0 \leq r_{ij} \leq s_T \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

donde:

$r_{ij} = s_T$ indica el máximo grado de preferencia de x_i sobre x_j .

$s_{T/2} < r_{ij} < s_T$ indica una preferencia definida de x_i sobre x_j .

$r_{ij} = s_{T/2}$ indica la indiferencia entre x_i y x_j .

Como la relación lingüística refleja una preferencia, es deseable que se satisfagan algunas de las siguientes propiedades, propuestas por Tanino para entornos borrosos (Tanino, 1988), e interpretadas aquí en un entorno lingüístico como sigue:

Reciprocidad: $r_{ij} = \text{Neg}(r_{ji})$, y $r_{ii} = s_0 \quad \forall i, j$.

Transitividad max-min: $r_{ik} \exists \min(r_{ij}, r_{jk}) \quad \forall i, j, k$.

Transitividad max-max: $r_{ik} \exists \max(r_{ij}, r_{jk}) \quad \forall i, j, k$.

Transitividad débil max-min: $r_{ij} \exists s_{T/2}, r_{jk} \exists s_{T/2} \Rightarrow r_{ik} \exists \min(r_{ij}, r_{jk}) \quad \forall i, j, k$.

Transitividad débil max-max: $r_{ij} \exists s_{T/2}, r_{jk} \exists s_{T/2} \Rightarrow r_{ik} \exists \max(r_{ij}, r_{jk}) \quad \forall i, j, k$.

Para poder hacer un buen uso de la relación de preferencia lingüística en los procesos de agregación de preferencias, es necesario disponer de operadores de agregación de información lingüística. En la literatura se pueden encontrar diferentes operadores (Bonissone & Decker, 1986; Cholewa, 1985; Delgado et al., 1993; Herrera et al., 1996; Peláez & Doña, 2003a; Peláez & Doña, 2003b; Yager, 1993), siendo deseable que dichos operadores cumplan una serie de axiomas, que garanticen soluciones aceptables para los procesos de decisión en grupo.

III.1.2 Axiomas de Agregación de Preferencias

El principal problema en los procesos de toma de decisión en grupo es cómo agregar la opinión de los expertos para obtener una decisión para el grupo donde dicha decisión pueda ser considerada correcta.

Algunos trabajos en la teoría clásica de toma de decisión en grupo usan los axiomas propuestos por Arrow (1963) como punto de comienzo y guía básica que garantice una decisión correcta. Arrow propone un conjunto cualitativo compuesto por un conjunto de axiomas, los cuales deben ser satisfechos por cualquier tipo de agregación en toma de decisión en grupo. El teorema de imposibilidad de Arrow introduce importantes resultados en este tema. De acuerdo con este teorema, es imposible agregar preferencias individuales dentro de un grupo de preferencias de una forma totalmente racional. Este problema desaparece en los conjuntos cardinales en contextos borrosos, introduciendo preferencias intensivas, las cuales proveen de grados adicionales de libertad al modelo de agregación (Cutello & Montero, 1994; Dubois & Koning, 1991).

III.1.2.1 Axiomas de agregación de preferencias en entornos borrosos

Como se ha mostrado anteriormente, es necesario disponer de una axiomática en el proceso de agregación (crisp o borroso) que garantice una decisión racional para el grupo. Cholewa (1985) da una aproximación parcial a los axiomas que son de cumplimiento necesario y ofrece una colección de axiomas para la agregación de opiniones borrosas ponderadas e indica cómo dicha ponderación cumple esos axiomas.

En (Dubois & Koning, 1991), se propone un análisis exhaustivo de todos los axiomas propuestos para la toma de decisión en grupo borrosa en entornos homogéneos. Estos axiomas son propiedades naturales de los procesos de agregación que incluyen los propuestos por Arrow. Algunos de éstos son, dominio universal, unanimidad, neutralidad,... y se establecen tres grupos:

Axiomas imperativos, cuya violación lleva a modos no intuitivos de agregación, por ejemplo, neutralidad.

Axiomas técnicos, que facilitan la representación y el cálculo del operador de agregación, por ejemplo, dominio universal.

Axiomas facultativos, que son aplicados en circunstancias especiales pero no son aceptados universalmente, por ejemplo, unanimidad.

Obviamente un operador de agregación particular ϕ no necesita satisfacer todos estos axiomas, pero sí aquellos que tienen una especial aplicación a las circunstancias requeridas.

En la próxima sección, estudiamos algunas de las propiedades y axiomas que los operadores de mayoría verifican, especialmente su variante lingüística.

III.2 OPERADOR LINGÜÍSTICO DE MAYORÍA

El operador lingüístico de mayoría se basa en los procesos de mayoría definidos por Peláez & Doña (2003a, 2003b, 2006) para eliminar los problemas de distribución (Von Neumann & Morgenstern, 1944; Nash, 1950; Robertson & Webb, 1998) en entornos lingüísticos. El operador se define como sigue:

Sea $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$, tal que $t > 0$ y sea $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in N$, la frecuencia o cardinalidad de las etiquetas, donde $\delta_i > 0$, $\delta_i \leq \delta_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. El operador lingüístico de mayoría ϕ es la etiqueta s_m dada por:

$$s_m = \phi(s_1, s_2, \dots, s_n) = s_1 \otimes \lambda_1 \oplus s_2 \otimes \lambda_2 \oplus \dots \oplus s_n \otimes \lambda_n$$

donde $\lambda_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Además, \otimes es el producto de una etiqueta por un real positivo y \oplus la suma de etiquetas dadas en Delgado et al. (1996).

Los valores λ_i se corresponden con los pesos de la agregación de cada etiqueta lingüística y se calculan del mismo modo que en los operadores de mayoría definidos en el capítulo anterior.

Ejemplo. Sea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con $S = \{\text{lo más bajo, muy bajo, bajo, mediano, alto, muy alto, lo más alto}\}$. Donde $s_0 = \text{lo más bajo}$, $s_1 = \text{muy bajo}$, $s_2 = \text{bajo}$, $s_3 = \text{mediano}$, $s_4 = \text{alto}$, $s_5 = \text{muy alto}$, $s_6 = \text{lo más alto}$.

Sea el conjunto de etiquetas: $\{\text{lo más bajo, lo más bajo, lo más bajo, mediano, alto, lo más alto, lo más alto, lo más alto, lo más alto}\}$, donde el número de etiquetas diferentes es 4 y la frecuencia o cardinalidad (orden creciente) es la siguiente:

$$\delta_1 = 1 (\text{mediano}), \delta_2 = 1 (\text{alto}), \delta_3 = 3 (\text{lo más bajo}), \delta_4 = 4 (\text{lo más alto})$$

entonces:

$$\begin{aligned} \phi(\text{mediano, alto, lo más bajo, lo más alto}) &= \\ p_3 \otimes \lambda_1 \oplus p_4 \otimes \lambda_2 \oplus p_0 \otimes \lambda_3 \oplus p_6 \otimes \lambda_4 &= \\ p_3 \otimes 0.013 \oplus p_4 \otimes 0.013 \oplus p_0 \otimes 0.236 \oplus p_6 \otimes 0.736 &= p_5 = \text{muy_alto} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_1 = f(s_1, \dots, s_n) &= \frac{\gamma_1^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_1^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_1^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_1^4}{\theta_4} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = 0.013; \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = f(s_1, \dots, s_n) = \frac{\gamma_2^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_2^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_2^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_2^4}{\theta_4} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = 0.013;$$

$$\lambda_3 = f(s_1, \dots, s_n) = \frac{\gamma_3^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_3^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_3^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_3^4}{\theta_4} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} = 0.236;$$

$$\lambda_4 = f(s_1, \dots, s_n) = \frac{\gamma_4^1}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2 \cdot \theta_1} + \frac{\gamma_4^2}{\theta_4 \cdot \theta_3 \cdot \theta_2} + \frac{\gamma_4^3}{\theta_4 \cdot \theta_3} + \frac{\gamma_4^4}{\theta_4} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} = 0.736;$$

usando una función de distancia para el cálculo de las cardinalidades con $x = 0$.

III.2.1 Propiedades del Operador Lingüístico

Antes de demostrar las propiedades del operador de mayoría lingüístico, enunciamos el siguiente teorema, que será de utilidad para la demostración de las propiedades.

Teorema. Sea $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ un vector de etiquetas ordenado ($a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$) y sea $a_i \in S$, entonces:

$$a_n \leq \phi(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq a_1$$

Propiedad 1. El operador de mayoría lingüístico es creciente monótonamente con respecto al valor de los argumentos.

Sea $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ un vector de argumentos, sea $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ un segundo vector de argumentos, ambos con igual vector de frecuencias δ , tal que $\forall j, a_j \leq b_j$ entonces

$$\phi (A) \leq \phi (B)$$

Demostración. Según la definición del operador si se mantiene la frecuencia δ de los elementos los pesos λ_i no varían. Por lo tanto, demostración de la propiedad es inmediata.

Propiedad 2. El operador es conmutativo,

$$\phi (a_1, a_2, \dots, a_n) = \phi (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)),$$

donde P es una permutación sobre el conjunto de elementos.

Demostración. Claramente la propiedad de conmutatividad se verifica, por el uso de un vector de pesos ordenados de los argumentos.

Propiedad 3. El operador de mayoría lingüístico es un operador “*orand*”. Es decir, para cualquier vector de pesos λ y un vector de etiquetas ordenado $S = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, entonces

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \phi (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Demostración. Claramente éste es una consecuencia del teorema anterior.

Propiedad 4. El operador es idempotente. Si $a_i = a$ para toda $i=1, \dots, n$, entonces:

$$\phi (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$$

Demostración. Claramente es consecuencia del uso de un vector de pesos cuya suma es uno.

III.2.2 Axiomas del Operador Lingüístico de Mayoría

A continuación se analizan los principales axiomas propuestos para los conjuntos borrosos considerando al operador de mayoría como la forma de agregación de los valores de preferencias lingüística. Antes de esto, se describe la notación que será utilizada.

Sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de no vacío de alternativas.

Sea $S = \{s_i; i = 0, \dots, T\}$ un conjunto de etiquetas con el que los expertos expresan su opinión.

Sea $p_{ij} \in S$ el valor lingüístico de la alternativa x_i dado por el experto e_j .

Sea F_j el conjunto de valores lingüísticos sobre las alternativas dado por el experto e_j .

Sea μ_{F_j} la función de pertenencia lingüística de F_j tal que $p_{ij} = \mu_{F_j} (x_i)$.

Sea F el valor lingüístico del conjunto tal que $F = \phi (F_1, F_2, \dots, F_m)$.

Axioma I. Dominio universal

Para cualquier conjunto de modelos de preferencias lingüísticas $\{F_j, j = 1, \dots, m\}$ hay un modelo de preferencia social F , que se construye,

$$\forall F_1, \dots, F_m \in S^n, \exists F \in S^n \text{ tal que } F = \phi (F_1, F_2, \dots, F_m).$$

De acuerdo con la definición del operador de mayoría, claramente es satisfecho este axioma.

Axioma II. Unanimidad.

Si todos los expertos expresan su modelos de preferencia sobre un mismo valor, éste debe ser elegido como modelo de preferencia social,

$$F_j = F, \forall j \Rightarrow F = \phi (F, F, \dots, F)$$

En base a la definición del operador, este axioma se verifica de forma inmediata por la propiedad de idempotencia.

Axioma III. Asociación positiva de los valores sociales e individuales.

Si un individuo aumenta la intensidad de su preferencia lingüística sobre x_i , entonces la preferencia lingüística social hacia x_i no puede disminuir. Esto significa que si F'_j y F_j son tales que $\mu_{F'_j} \leq \mu_{F_j}$, entonces si $\phi (F_1, \dots, F_j, \dots, F_m) = F$ y $\phi (F_1, \dots, F'_j, \dots, F_m) = F'$, entonces $\mu_F \leq \mu_{F'}$.

Este axioma es una consecuencia inmediata de la propiedad de incremento monótono del operador.

Axioma IV. Independencia de alternativa irrelevante.

La intensidad de la preferencia social para x_i solamente depende de la intensidad de las preferencias individuales sobre x_i y no de las $x_k, k \neq i$,

Básicamente se satisface por la propia definición del operador. Aunque este axioma no se puede extender estrictamente hablando, a problemas donde únicamente existen un par de alternativas.

Axioma V. Soberanía del pueblo.

Todo modelo de preferencia social puede ser expresado por los individuos de la sociedad, es decir:

$$\forall F, \exists F_1, F_2, \dots, F_m \text{ tal que } F = \phi(F_1, F_2, \dots, F_m)$$

Otra variación del axioma soberanía del pueblo es el axioma *No Dictatorial* (Arrow, 1963). No hay individuos e_j tales que

$$\phi(F_1, \dots, F_j, \dots, F_m) = F_j$$

Este requisito prohíbe que ningún individuo pueda actuar como dictador bajo ninguna circunstancia siendo esta una de las características base de la definición de mayoría.

Obviamente, este axioma es satisfecho de forma general, ya que es una consecuencia del axioma II (unanimidad). Como el operador es conmutativo, también satisface el axioma no dictatorial.

Axioma VI. Neutralidad.

El axioma de neutralidad se refiere a la invarianza de las propiedades del proceso de voto. Hay tres tipos:

Neutralidad respecto a las alternativas. Si x_i y x_k son tales que $x_{ij} = x_{kj}$, $\forall j$, entonces

$$\mu_{\varphi(F_1, \dots, F_m)}(x_i) = \mu_{\varphi(F_1, \dots, F_m)}(x_k)$$

Neutralidad respecto a los votantes. Por ejemplo la conmutabilidad de N .

Neutralidad con respecto a la intensidad de la escala o neutralidad de complemento. Si F_j^c es el complemento de F_j , tal que $F_j^c = \text{Neg}(F_j)$.

Claramente la el primer tipo es verificado por el operador, además, como el operador es conmutativo también se satisface la neutralidad respecto a los votantes. Finalmente, como característica diferenciadora con respecto a los operadores OWA tradicionales, cabe señalar que sí se satisface la neutralidad respecto a la intensidad de la escala al estar los pesos asociados no sólo a la posición del valor en el vector, sino al valor de su importancia δ_i dentro de la agregación.

En conclusión, el operador de Mayoría Lingüística satisface los principales axiomas imperativos, técnicos y facultativos por lo que se justifica su uso dentro de los entornos de toma de decisión lingüísticos.

III.3 EL MÉTODO DIRECTO APLICADO A LOS GRUPOS DE DECISIÓN CON VALORACIONES LINGÜÍSTICAS

Supongamos que tenemos un conjunto de n alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Cada experto $e_k \in E$ expresa una relación de preferencia lingüística asociada al conjunto de etiquetas S :

$$\omega_{p^k} : X \times X \rightarrow S$$

donde $\omega_{p^k}(x_i, x_j) = p_{ij}^k \in S$ representa el grado de preferencia lingüística asociado de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j . Se asume que P^k es recíproca sin pérdida de generalidad.

Básicamente se consideran dos formas de resolución para los problemas de decisión en grupo. Una resolución directa:

$$\{P^1, \dots, P^m\} \rightarrow \text{solución}$$

de acuerdo con el cual, se deriva la solución en base a las relaciones de preferencia individuales. Y un enfoque indirecto:

$$\{P^1, \dots, P^m\} \rightarrow P \rightarrow \text{solución}$$

donde la solución se halla en base a la relación de preferencia colectiva, P , que es una relación de preferencia del grupo de individuos considerados como un todo.

Son tres los modelos de solución del enfoque directo para los procesos de toma de decisión en grupo en un entorno lingüístico: (i) Proceso de Dominio (PD), (ii) Proceso de Dominio Estricto (PDE), (iii) Proceso Sin Dominio (PSD). Todos estos procesos están calculados sobre dos niveles de acción:

Nivel de preferencia o nivel de individualidad. Los distintos grados de preferencia lingüística se calculan de acuerdo a la opinión de cada experto, considerados de forma individual.

Nivel de gradación o Nivel del grupo. Los diferentes grados de preferencia lingüística se calculan de acuerdo a la opinión de todos los expertos del grupo considerados como un todo.

Hay que señalar que entre ambos niveles el concepto de borrosidad será distinto, siendo necesario el uso de cuantificadores en algunos niveles de proceso según el modelo que se use (Yager, 1996).

III.3.1 Enfoques de Agregación en el Modelo Directo.

El nivel de gradación o de grupo es común en todos los modelos de decisión, trabajándose tradicionalmente con una función de agregación (lingüística o numérica según el tipo de problema), de forma que se aplica sobre los resultados del nivel de preferencia o individual un operador de agregación (Herrera et al., 1996; Fodor & Roubens, 1994).

En este capítulo se propone un nuevo enfoque de agregación alternativo al anterior basado en aplicar un algoritmo de agrupación sobre los resultados del nivel de preferencia tal y como se realiza en los procesos de mayoría (Peláez & Doña, 2006).

Como se ha mostrado anteriormente, los procesos de mayoría calculan el valor representativo de la agregación a través de un proceso social de toma de decisión donde los expertos tienden a agruparse en diferentes grupos en base a la afinidad de sus juicios o preferencias. Esta agrupación se puede realizar de forma independiente o dependiente del valor de las preferencias calculadas en el primer nivel. Para ambos casos se proponen distintas medidas de distancia que se pueden clasificar en dos grupos: dependientes e independientes del valor de preferencia a agregar.

III.3.1.1 Distancias dependientes del valor de preferencia.

Las técnicas de agrupamiento dependientes del valor de preferencia se corresponden con las funciones de distancia más usadas y se basan fundamentalmente en el concepto de similitud (o disimilitud) entre elementos y agrupaciones. En este sentido se utilizan métricas (o distancias) para medir la similitud entre elementos. Las métricas más usadas son:

$$D_q(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^q \right)^{1/q}$$

de entre las que destacan las siguientes:

Manhattan ($q = 1$)

$$D_M(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Distancia Euclidea ($q = 2$)

$$D_E(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - y_i)^2}$$

Distancia simétrica de Kullback-Leibler :

$$D_{KL}(\bar{x} \parallel \bar{y}) = \sum_i \bar{x} \times \log_2 \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Medidas de dispersión (rango, desviación, varianza, etcétera).

III.3.1.2 Distancias independientes del valor de preferencia

Las distancias independientes del valor de preferencia son aquellas que determinan el valor de separación entre los elementos sin considerar el valor numérico de los mismos. Una forma útil de calcular estas distancias es a través de los grafos de preferencias.

Un grafo de preferencias, denotado por GP , es una estructura que representa el orden de preferencia de las alternativas de un decisor. Este orden que crea el decisor y que es representado mediante un GP , puede ser utilizado para:

Calcular la distancia entre decisores.

Calcular el coste que tendría modificar el orden de una alternativa.

En esta categoría se definen las siguientes distancias:

Distancia basada en el orden de las alternativas. Su cálculo se realiza en función del número de movimientos naturales que debe realizar un decisor o experto para obtener el mismo orden de alternativas que otro.

Se define la distancia del experto e_i respecto al decisor e_j , con grafos de preferencias de alternativas GP_i y GP_j respectivamente, y la denotaremos como $D^{or}(e_i, e_j)$, como el mínimo número de movimientos (naturales) que tiene que realizar el decisor e_i para alcanzar el orden del decisor e_j . A continuación se demuestra que esta medida es una métrica válida.

Definición. Un espacio métrico es un par (S, d) donde S es un conjunto no vacío y d es la métrica para el espacio, que es una función $S \times S$ en $[0, \infty]$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$d(p, q) = 0 \text{ si } p = q.$$

$$d(p, q) > 0 \text{ si } p \neq q.$$

$$d(p, q) = d(q, p) = 0 \quad \forall p, q \in S.$$

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) = 0 \quad \forall p, q, r \in S.$$

Teorema. La distancia D^{or} es una métrica.

Demostración. Basándonos en la forma natural de movimiento de las alternativas, es fácil comprobar cómo la distancia D^{or} cumple las condiciones de la definición de espacio métrico.

Distancia basada en el coste de movimiento. Se determina el coste de los movimientos naturales que debe realizar un decisor para obtener el mismo orden de las alternativas que otro decisor.

Otra medida para calcular la distancia entre decisores, es el coste de mover una alternativa de forma natural en el grafo de preferencias. Para definir el coste de movimiento, se establece una escala común de importancia asociada a la posición de las alternativas en el grafo de preferencias para todos los decisores. Estudios realizados por diferentes investigadores (Doise et al., 1985; Roubens, 1985) muestran que para la estimación de estas escalas el modelo exponencial es el más adecuado.

Definición. Se define la importancia de una alternativa A_l en un grafo de preferencias GP_i como b^{k-1} , donde b es la base de la escala y k es la posición que ocupa la alternativa, contada de derecha a izquierda.

Definición. Se define el coste de mover una alternativa en un grafo de preferencias, y la denotamos como C^{or} , como la diferencia de importancia entre la posición nueva y la antigua.

Teorema. El coste C^{or} es una métrica.

Demostración. Basándonos en la forma natural de movimiento de las alternativas, es fácil comprobar cómo el coste C^{or} cumple las condiciones de la definición de espacio métrico.

Definidos los distintos modelos de distancias, el proceso de agregación para el modelo directo aplicando el concepto de agrupación de mayoría queda como sigue:

Una vez que los expertos han emitido sus juicios, se generan los grafos de preferencia utilizando las prioridades para cada uno de los grupos de decidores. Seguidamente se calculan las distancias sobre los grafos de preferencias. En este capítulo la medida D^{or} será utilizada como medida principal de agrupación, utilizándose la media C^{or} para resolver conflictos entre grupos. Estas distancias indican el orden de agrupación, de manera, que aquellos grupos que estén más cercanos se agruparán en primer lugar formando nuevos grupos con un nuevo valor y mayor cardinalidad.

En las siguientes secciones se muestran los distintos procesos aplicados en los problemas de toma de decisión en grupo sobre los que se aplicará el nuevo enfoque de agregación descrito. Finalmente, se desarrolla un ejemplo de dichos modelos para la aplicación directa del operador así como un ejemplo donde se usa el enfoque de agregación basado en las medidas anteriores.

III.3.2 Proceso de Dominio

Este proceso usa un grado de dominio lingüístico en cada alternativa para decidir cuáles de ellas son elegidas como solución del problema de toma de decisión en

grupo. El grado de dominio lingüístico de una alternativa da una medida de aproximación al grado de preferencia de las alternativas en global en función de la opinión de los expertos.

El proceso se describe en los siguientes pasos:

Nivel Individual

Para cada relación de preferencia lingüística de cada experto, P^k , usando el operador ϕ , se calcula el grado de dominio lingüístico de cada alternativa x_i , llamado ID_i^k , de acuerdo con la expresión:

$$ID_i^k = \phi(p_{ij}^k, j = 1, \dots, n, j \neq i)$$

con $k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$.

Nivel Social

Para cada alternativa x_i , se determina el grado de dominio lingüístico social, llamado SD_i , como sigue

$$SD_i = \phi(ID_i^k, k = 1, \dots, m)$$

con $i = 1, \dots, n$.

Se obtiene el conjunto de alternativas con máximo grado de dominio lingüístico

X_{max}^d , de la siguiente forma

$$X_{max}^d = \{x_i \in X / SD_i = \max_j (SD_j)\}$$

siendo éste el conjunto solución.

III.3.3 Proceso de Dominio Estricto

Este proceso selecciona la alternativa o alternativas de solución de acuerdo con su respectivo grado de dominio estricto lingüístico. El grado de dominio estricto lingüístico da una medida lingüística del número de veces que una alternativa es preferida sobre las demás de acuerdo con todas las opiniones de los expertos. Para ello se hace uso de un cuantificador borroso $Q: [0, 1] \rightarrow L$, siendo L el conjunto de etiquetas. El cuantificador Q viene dado por la siguiente expresión:

$$Q(r) = \begin{cases} l_0 & \text{si } r < a, \\ l_i & \text{si } a \leq r \leq b, \\ l_u & \text{si } r > b \end{cases}$$

l_0 y l_u son las etiquetas mínima y máxima en L respectivamente,

$$l_i = \text{Sup}_{l_q \in M} \{l_q\}$$

con

$$M = \left\{ l_q \in L : \mu_{l_q}(r) = \text{Sup}_{l_i \in M} \left\{ \mu_{l_i} \left(\frac{r-a}{b-a} \right) \right\} \right\}$$

con $a, b, r \in [0, 1]$. Otra definición de Q puede ser encontrada en Yager (1996).

El proceso se describe en los siguientes pasos:

Nivel Individual

Para cada relación de preferencia lingüística de cada experto P^k , se determina el grado de dominio estricto individual de cada alternativa x_i , llamado ISD_i^k , de acuerdo con la expresión:

$$ISD_i^k = Q\left(\frac{r_i^k}{n-1}\right),$$

con $k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$, siendo

$$r_i^k = \#\{x_j \in X \text{ talque } p_{ij} > p_{ji}, j = 1, \dots, n, j \neq i\},$$

donde $\#$ representa el cardinal del conjunto.

Nivel Social

Para cada alternativa x_i , se calcula el grado lingüístico de dominio estricto social, llamado SSD_i , como sigue

$$SSD_i = \phi(ISD_i^k, k = 1, \dots, m)$$

con $i = 1, \dots, n$.

Obtenemos el conjunto de alternativas con mayor grado lingüístico de dominio estricto X_{max}^{sd} , de la forma

$$X_{max}^{sd} = \{x_i \in X / SSD_i = \max_j(SSD_j)\}$$

siendo el conjunto resultante la solución.

III.3.4 Proceso no Dominante

Este proceso selecciona la alternativa o alternativas solución de acuerdo con su respectivo grado no dominante. El grado lingüístico no dominante de una alternativa expresa una medida lingüística sobre lo que una alternativa no es dominada por las demás, de acuerdo a la opinión de los expertos. Éste se calcula sobre el concepto de alternativas no dominantes descrito por Orlovsky (1978), extendido para entornos lingüísticos.

El proceso de toma de decisión en grupo se describe en los siguientes pasos:

Nivel Individual

Para cada relación de preferencia lingüística de cada experto, P^k , calculamos su respectiva relación de preferencia estricta, P_s^k con $\omega_{P_s^k} = p_{sij}^k$, tal que,

$$p_{sij}^k = s_0 \text{ si } p_{ij}^k < p_{ji}^k,$$

$$\text{o } p_{sij}^k = s_h \in S \text{ si } p_{ij}^k \geq p_{ji}^k \text{ con } p_{ij}^k = s_l, p_{ji}^k = s_t \text{ y } l = t + h.$$

Para cada relación de estricta preferencia lingüística de cada experto P_s^k se calcula el grado lingüístico individual no dominante para cada alternativa x_i , llamado IND_i^k , según la expresión:

$$IND_i^k = \min_{x_j \in X} [Neg(\omega_{P_s^k}(x_j, x_i))]]$$

con $k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$.

Nivel Social

Para cada alternativa x_i , calculamos el grado lingüístico social no dominante, llamado SND_i , como sigue

$$SND_i = \phi(IND_i^k, k = 1, \dots, m)$$

con $i = 1, \dots, n$.

Obtenemos la solución como el conjunto de alternativas con mayor grado lingüístico no dominante, X_{max}^{nd} según la expresión

$$X_{max}^{nd} = \{x_i \in X / SND_i = \max_j(SND_j)\}$$

III.3.5 Proceso Secuencial

En algunas ocasiones la solución está formada por más de una alternativa. Esta situación puede ocurrir entre otros motivos por la inconsistencia en las opiniones de los expertos. En estos casos, la aplicación combinada de los tres modelos

anteriores puede ser muy interesante, ya que puede ayudar a resolver la situación de inconsistencia e identificar la mejor solución del conjunto de alternativas.

En base a lo anterior, en Herrera et al. 1996 se propone un proceso de toma de decisión en grupo que combina los anteriores, denominado proceso secuencial. Este modelo consiste en aplicar cada uno de los procesos anteriores de forma secuencial, de acuerdo con algún criterio de orden preestablecido. Por ejemplo, podemos dar el orden en el que se han presentado anteriormente los distintos modelos. Según esta suposición, el proceso secuencial, se desarrolla en los siguientes pasos:

Se aplica el primer modelo, *PD* sobre X , y se obtiene X_{max}^d . Si $\#(X_{max}^d) = 1$, entonces se finaliza obteniendo la solución. En otro caso se continua, usando el paso siguiente.

Se aplica el segundo modelo, *PDE* sobre X , obteniéndose $X_{max}^{sd-d} \subseteq X_{max}^d$. Si $\#(X_{max}^{sd-d}) = 1$ entonces se finaliza y esa es la solución. En otro caso se continua con el paso siguiente.

Se aplica el tercer modelo, *PSD* sobre X , obteniéndose $X_{max}^{nd-sd-d} \subseteq X_{max}^{sd-d}$, siendo esta la mejor solución.

III.4 EJEMPLOS

En esta sección se muestra una aplicación de los procesos anteriormente descritos. Los ejemplos se van a desarrollar aplicando inicialmente el operador de

mayoría lingüístico mostrando su idoneidad para los problemas de toma de decisión, posteriormente se desarrollan los ejemplos usando un enfoque de agregación independiente del valor de preferencia salvo para el modelo secuencial para evitar la reiteración de cálculos. Para ello definimos el siguiente conjunto de etiquetas lingüísticas.

Sea S el conjunto de nueve etiquetas lingüísticas:

<i>TP</i>	Totalmente Preferido	(1.0, 1.0, 0.0, 0.0)
<i>MP</i>	Muy Preferido	(0.98, 0.99, 0.05, 0.01)
<i>BP</i>	Bastante Preferido	(0.78, 0.92, 0.06, 0.05)
<i>CP</i>	Casi Preferido	(0.63, 0.80, 0.05, 0.06)
<i>ID</i>	Indiferente	(0.41, 0.58, 0.09, 0.07)
<i>CD</i>	Casi Detestado	(0.22, 0.36, 0.05, 0.06)
<i>BD</i>	Bastante Detestado	(0.10, 0.18, 0.06, 0.05)
<i>MD</i>	Muy Detestado	(0.01, 0.02, 0.01, 0.05)
<i>TD</i>	Totalmente Detestado	(0.0, 0.0, 0.0, 0.0)

Supongamos un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, así como un conjunto de cuatro expertos $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ los cuales expresan sus respectivas

opiniones con relaciones de preferencia lingüística sobre X , usando las etiquetas de S , en las siguientes matrices:

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & CD & TP & TD \\ CP & - & MD & MP \\ TD & MP & - & BD \\ TP & MD & BP & - \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} - & ID & TP & MD \\ ID & - & MD & TP \\ TD & MP & - & BD \\ MP & TD & BP & - \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} - & CD & MP & TD \\ CP & - & TD & MP \\ MD & TP & - & BD \\ TP & MD & BP & - \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} - & ID & TP & MD \\ ID & - & MD & TP \\ TD & MP & - & BD \\ MP & TD & BP & - \end{bmatrix}$$

III.4.1 Proceso de Dominio

Paso 1. Se calcula el grado de dominio lingüístico individual para cada alternativa usando el operador de mayoría lingüístico con vector de pesos $\lambda = [0.333, 0.333, 0.333]$.

Experto 1:

$$(ID_1^1, ID_2^1, ID_3^1, ID_4^1) = [ID, ID, CD, CP]$$

Experto 2:

$$(ID_1^2, ID_2^2, ID_3^2, ID_4^2) = [ID, ID, CD, ID]$$

Experto 3:

$$(ID_1^3, ID_2^3, ID_3^3, ID_4^3) = [ID, ID, ID, CD]$$

Experto 4:

$$(ID_1^4, ID_2^4, ID_3^4, ID_4^4) = [ID, ID, CD, CD]$$

Paso 2. Se determina el grado de dominio lingüístico social para cada alternativa usando el operador de mayoría con $\lambda_1 = [1]$; $\lambda_2 = [1]$; $\lambda_3 = [7/8, 1/8]$; $\lambda_4 = [4/6, 1/6, 1/6]$:

$$(SD_1, SD_2, SD_3, SD_4) = [ID, ID, CD, ID]$$

Paso 3. El conjunto de alternativas con máximo grado de dominio lingüístico es:

$$X_{max}^d = \{x_1, x_2, x_4\}$$

III.4.2 Proceso de Dominio Estricto

Paso 1. Se calcula el grado de dominio lingüístico estricto individual para cada alternativa:

Experto 1:

$$(ISD_1^1, ISD_2^1, ISD_3^1, ISD_4^1) = [Q(1/3), Q(2/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, CD, TD, CD]$$

Experto 2:

$$(ISD_1^2, ISD_2^2, ISD_3^2, ISD_4^2) = [Q(1/3), Q(1/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, TD, TD, CD]$$

Experto 3:

$$(ISD_1^3, ISD_2^3, ISD_3^3, ISD_4^3) = [Q(1/3), Q(1/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, TD, TD, CD]$$

Experto 4:

$$(ISD_1^4, ISD_2^4, ISD_3^4, ISD_4^4) = [Q(1/3), Q(1/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, CD, TD, CD].$$

Paso 2. Se determina el grado de dominio estricto lingüístico social para cada alternativa usando el operador de mayoría lingüístico con vector de pesos $\lambda_1 = [1]; \lambda_2 = [7/8, 1/8]; \lambda_3 = [1]; \lambda_4 = [1]$:

$$(SSD_1, SSD_2, SSD_3, SSD_4) = [TD, BD, TD, CD]$$

Paso 3. El conjunto de alternativas con máximo grado de dominio lingüístico es:

$$X_{max}^{sd} = \{x_4\}$$

5.3 Proceso No Dominante

Paso 1. Se calcula Las relaciones de estricta preferencia lingüística para cada experto.

$$P_s^1 = \begin{bmatrix} - & TD & TP & TD \\ BD & - & TD & BP \\ TD & BP & - & TD \\ TP & TD & ID & - \end{bmatrix} \quad P_s^2 = \begin{bmatrix} - & TD & TP & TD \\ TD & - & TD & TP \\ TD & BP & - & TD \\ BP & TD & ID & - \end{bmatrix}$$

$$P_s^3 = \begin{bmatrix} - & TD & BP & TD \\ TP & - & TD & BP \\ TD & TP & - & TD \\ TP & BP & ID & - \end{bmatrix} \quad P_s^4 = \begin{bmatrix} - & TD & TP & TD \\ TD & - & TD & TP \\ TD & BP & - & TD \\ BP & TD & ID & - \end{bmatrix}$$

Paso 2. Se determina el grado no dominante lingüístico individual para cada alternativa

Experto 1:

$$(IND_1^1, IND_2^1, IND_3^1, IND_4^1) = [TD, BD, TD, BD]$$

Experto 2:

$$(IND_1^2, IND_2^2, IND_3^2, IND_4^2) = [BD, BD, TD, TD]$$

Experto 3:

$$(IND_1^3, IND_2^3, IND_3^3, IND_4^3) = [TD, TD, BD, BD]$$

Experto 4:

$$(IND_1^4, IND_2^4, IND_3^4, IND_4^4) = [TD, MD, TD, TD]$$

Paso 3. Se halla el grado no dominante lingüístico social para cada alternativa usando el operador de mayoría lingüístico con vector de pesos $\lambda_1 = [1/2, 1/2]$; $\lambda_2 = [1]$; $\lambda_3 = [7/8, 1/8]$; $\lambda_4 = [1/2, 1/2]$:

$$(SND_1, SND_2, SND_3, SND_4) = [TD, MD, TD, MD]$$

Paso 4. El conjunto de alternativas con máximo grado de sin dominio lingüístico es:

$$X_{max}^{nd} = \{x_2, x_3\}$$

III.4.3 Proceso Secuencial

Paso 1. Después de aplicar el proceso de dominio se obtiene el conjunto de alternativas con máximo grado de dominio lingüístico:

$$X_{max}^d = \{x_1, x_2, x_4\}$$

Como el cardinal de X_{max}^{sd} es mayor que 1, continuamos aplicando el siguiente modelo, considerando únicamente las opciones de la solución anterior

$$(SSD_1, SSD_2, SSD_4) = [TD, BD, CD]$$

siendo

$$X_{max}^{sd-d} = \{x_4\}$$

Como el cardinal de X_{max}^{sd-d} es 1 finalizamos siendo ésta la solución.

En consecuencia, aplicando los modelos citados de forma conjunta, es posible distinguir la mejor alternativa del conjunto de las posibles.

III.4.4 Proceso de Dominio con Agregación Independiente

Paso 1. Se calcula el grado de dominio lingüístico individual para cada alternativa usando el operador de mayoría lingüístico con vector de pesos $\lambda_i = [0.333, 0.333, 0.333]$; $i = 1, \dots, 4$:

Experto 1:

$$(ID_1^1, ID_2^1, ID_3^1, ID_4^1) = [ID, ID, CD, CP]$$

Experto 2:

$$(ID_1^2, ID_2^2, ID_3^2, ID_4^2) = [ID, ID, CD, ID]$$

Experto 3:

$$(ID_1^3, ID_2^3, ID_3^3, ID_4^3) = [ID, ID, ID, CD]$$

Experto 4:

$$(ID_1^4, ID_2^4, ID_3^4, ID_4^4) = [ID, ID, CD, CD]$$

Paso 2. Se determina el grado de dominio lingüístico social para cada alternativa usando el algoritmo de agrupación:

Se establece el orden de alternativas para cada experto:

Experto 1: $[x_4, x_1, x_2, x_3]$

Experto 2: $[x_4, x_1, x_2, x_3]$

Experto 3: $[x_1, x_2, x_3, x_4]$

Experto 4: $[x_1, x_2, x_3, x_4]$

Siendo la matriz de distancias

$$D^{or} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se comprueba e_1 y e_2 están a distancia 0 al igual que e_3 y e_4 . Por lo que al no haber conflicto se aplica directamente la agregación con el operador de mayoría.

$$e_N = (e_1 - e_2) = (ID, ID, BD, CP)$$

$$e_{N2} = (e_3 - e_4) = (ID, ID, CP, CD)$$

La pareja final se agrega con resultado (ID, ID, CD, ID)

Paso 3. El conjunto de alternativas con máximo grado de dominio lingüístico es:

$$X_{max}^d = \{x_1, x_2, x_4\}$$

III.4.5 Proceso de Dominio Estricto con Agregación Independiente

Paso 1. Se calcula el grado de dominio lingüístico estricto individual para cada alternativa:

Experto 1:

$$(ISD_1^1, ISD_2^1, ISD_3^1, ISD_4^1) = [Q(1/3), Q(2/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, CD, TD, CD]$$

Experto 2:

$$(ISD_1^2, ISD_2^2, ISD_3^2, ISD_4^2) = [Q(1/3), Q(1/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, TD, TD, CD]$$

Experto 3:

$$(ISD_1^3, ISD_2^3, ISD_3^3, ISD_4^3) = [Q(1/3), Q(1/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, TD, TD, CD]$$

Experto 4:

$$(ISD_1^4, ISD_2^4, ISD_3^4, ISD_4^4) = [Q(1/3), Q(1/3), Q(1/3), Q(2/3)] = [TD, CD, TD, CD]$$

Paso 2. Se determina el grado de dominio estricto lingüístico social para cada alternativa usando el algoritmo de agrupación:

Se establece el orden de alternativas para cada decisor:

Experto 1: $[x_3, x_4, x_1, x_2]$

Experto 2: $[x_4, x_1, x_2, x_3]$

Experto 3: $[x_4, x_1, x_2, x_3]$

Experto 4: $[x_3, x_4, x_1, x_2]$

Resultando la matriz de distancias

$$D^{or} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde la agregación de los grupos produce:

$$e_{N1} = (e_1 - e_4) = (TD, CD, TD, CD)$$

$$e_{N2} = (e_2 - e_3) = (TD, TD, TD, CD)$$

Se agrega la pareja final con resultado: (TD, BD, TD, CD)

Paso 3. El conjunto de alternativas con máximo grado de dominio lingüístico es:

$$X_{max}^{sd} = \{x_4\}$$

III.4.6 Proceso No Dominante con Agregación Independiente

Paso 1. Se calcula Las relaciones de estricta preferencia lingüística para cada experto.

$$P_s^1 = \begin{bmatrix} - & TD & TP & TD \\ BD & - & TD & BP \\ TD & BP & - & TD \\ TP & TD & ID & - \end{bmatrix}, \quad P_s^2 = \begin{bmatrix} - & TD & TP & TD \\ TD & - & TD & TP \\ TD & BP & - & TD \\ BP & TD & ID & - \end{bmatrix},$$

$$P_s^3 = \begin{bmatrix} - & TD & BP & TD \\ TP & - & TD & BP \\ TD & TP & - & TD \\ TP & BP & ID & - \end{bmatrix}, \quad P_s^4 = \begin{bmatrix} - & TD & TP & TD \\ TD & - & TD & TP \\ TD & BP & - & TD \\ BP & TD & ID & - \end{bmatrix}$$

Paso 2. Se determina el grado no dominante lingüístico individual para cada alternativa

Experto 1:

$$(IND_1^1, IND_2^1, IND_3^1, IND_4^1) = [TD, BD, TD, BD]$$

Experto 2:

$$(IND_1^2, IND_2^2, IND_3^2, IND_4^2) = [BD, BD, TD, TD]$$

Experto 3:

$$(IND_1^3, IND_2^3, IND_3^3, IND_4^3) = [TD, TD, BD, BD]$$

Experto 4:

$$(IND_1^4, IND_2^4, IND_3^4, IND_4^4) = [TD, MD, TD, TD]$$

Paso 3. Se halla el grado no dominante lingüístico social usando el algoritmo de agrupación:

Se establece el orden de alternativas para cada decisor:

Experto 1: $[x_2, x_4, x_1, x_3]$

Experto 2: $[x_1, x_2, x_3, x_4]$

Experto 3: $[x_3, x_4, x_1, x_2]$

Experto 4: $[x_2, x_1, x_3, x_4]$

Resultando la matriz de distancias

$$D^{or} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

El grupo de menor distancia lo conforman e_2 y e_4 , resultando: (TD, MD, TD, MD) , que da el orden: (x_2, x_4, x_1, x_3) . Por lo que la nueva matriz de distancias es

$$D^{or} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Se agregan los grupos de distancia 0 resultando un nuevo grupo: con valor: (TD, BD, TD, MD)

Se agrega la pareja final con resultado: (TD, MD, TD, MD)

Paso 4. El conjunto de alternativas con máximo grado de sin dominio lingüístico es:

$$X_{max}^{nd} = \{x_2, x_4\}$$

Capítulo 4 Aplicaciones

Una vez que se han presentado los procesos de agregación social de mayoría junto con su generalización, extensión a entornos geométricos y cuantificación lingüística, demostrándose su idoneidad para ser aplicados en sistemas de toma de decisión, se considera de interés presentar resultados prácticos reales contrastados sobre aplicaciones realizadas con los mismos.

El abanico de posibilidades de uso de estos nuevos sistemas de agregación y decisión es tan amplio que se pueden incluir ejemplos que van desde la toma de decisión en grupo (Llamazares 2007), hasta modelos de evaluación de comercio electrónico (Jiang et al. 2006).

Para ilustrar esta circunstancia, en este capítulo se desarrollarán soluciones a los siguientes problemas:

- Valoración de empresas, donde se modificará el modelo *Discounted Cash-Flow* para que pueda incorporar la semántica de mayoría.
- Imputación de datos, en el que se introduce la aplicación de los operadores de mayoría para la recuperación de información en bases de datos.
- Y, finalmente, tratamiento de imágenes, en este caso se muestran los procesos de mayoría como una alternativa real a los métodos clásicos de eliminación de ruido como método lineal de convolución.

IV.1 VALORACIÓN ESTRATÉGICA DE EMPRESAS

En la actualidad, el éxito de los movimientos bursátiles así como de la valoración de activos en el mercado empresarial depende enormemente de la capacidad de prever las tendencias del mercado y responder rápidamente. Los directivos deben asimilar la información y adoptar las decisiones en entornos caóticos, muchas veces sin contar con experiencia, una planificación suficientes, e incluso sin disponer del tiempo necesario para llevar a cabo un análisis riguroso y sistemático (Besoun, 2004; Cross & Brodt, 2006).

Todas estas circunstancias sientan las razones por las que el conocimiento de las últimas técnicas en toma de decisión, tienen especial relevancia en el entorno empresarial y de mercado. Generalmente, en todos estos procesos no resulta

factible establecer un criterio estandarizado de decisión que sea útil en cualquier caso, dado que cada operación es, en sí misma, diferente al resto. De ahí que el final en un sistema de decisión, en este ámbito, se encuentre ligado a un proceso de negociación o consenso entre las partes interesadas en el objetivo. En muchos casos, dichos mecanismos vienen establecidos por las opiniones solicitadas a expertos en el tema, los cuales facilitan una serie de valoraciones que permiten obtener un valor final de decisión satisfactorio. En estas condiciones es necesario habilitar mecanismos que permitan generar resultados representativos del grupo y operar con la incertidumbre inherente a las opiniones expresadas por los decisores, que en muchos casos vendrán definidas de forma cualitativa (Kaufmann & Gil, 1986).

En esta sección se presenta un nuevo modelo de valoración de empresas donde se ofrece al decisor, tanto a nivel empresarial como de mercado, una nueva herramienta basada en los procesos de mayoría que le permite mejorar sensiblemente la calidad de su decisión en un contexto de falta de información y en la necesidad de tomarla con celeridad.

IV.1.1 Descripción del modelo de valoración de empresas propuesto

Uno de los aspectos fundamentales de la Teoría Financiera moderna es el referido a la valoración de empresas. La demanda de métodos adecuados de valoración de acciones y empresas es creciente. El papel que juegan los procesos de fusiones y adquisiciones en la estrategia actual de los negocios también exige de buenos modelos financieros que nos permitan inferir las potenciales sinergias de todo

tipo de operaciones de combinación y/o reestructuración de sociedades (Ruiz & Gil, 2004).

El valor busca su apoyo en un fundamento lógico o matemático lo más riguroso posible. Busca la objetividad, la neutralidad y la independencia frente a las partes, las relaciones de fuerzas en el mercado e incluso la propia situación del mercado. Sin embargo, la necesidad de predecir escenarios futuros en los cuales se va a desarrollar la actividad de la misma, además de otras circunstancias, genera la imposibilidad de determinar un único valor, lo que nos limita a establecer un rango u horquilla de valores posibles, dentro de los cuales se encontrará el valor más probable de la empresa. El valor definitivo vendrá por consenso y negociación entre las partes interesadas. En consecuencia, será la amplitud de la horquilla de valores posibles la que finalmente caracterice el informe de valoración previo a la decisión.

Es en este punto justamente en dónde se quiere dar un salto de calidad en la mejora de la información disponible para el inversor, toda vez que si con la metodología propuesta se logra disminuir la amplitud del intervalo de valores posibles, se acercarán las posturas de las partes interesadas. Si ello es así, se habrá aumentado la posibilidad de acuerdo para cerrar la operación en un precio de equilibrio consensuado o mínimamente negociado. De esta forma habremos colaborado al aumento de la liquidez y eficiencia del mercado.

En los últimos años, con la globalización de los mercados, el paralelo desarrollo tecnológico de los mismos y la aparición de nuevos instrumentos financieros, se han desarrollado también nuevas técnicas de valoración y mejorado las existentes. Ello ha llevado consigo un aumento del espectro de métodos de

valoración, de su posible marco de actuación y de la necesidad de discriminar qué métodos son aplicables en unas determinadas circunstancias u otras y la veracidad y credibilidad de sus resultados.

En este trabajo se va a utilizar el que en la actualidad tiene mayor aceptación en la comunidad científica y profesional, que no es otro que el modelo *Discounted Cash-Flow*. La expresión general que lo caracteriza es la siguiente:

$$V_E = \sum_{t=1}^n \frac{CFL_t}{\prod_{j=1}^t (1 + K_j)^t}$$

donde V_E representa el valor actual de la empresa; CFL es el Cash Flow libre de la empresa para el período- t (incluyendo el valor residual). K_j es la tasa de actualización adecuada y ajustada por riesgo (WACC) para el periodo- j y n es el Horizonte de valoración.

IV.1.2 Solución al Problema

Tomemos como primer paso la estimación de la tasa de actualización adecuada y ajustada por riesgo, que suele ser el coste medio ponderado de capital (WACC). Podemos comenzar con un análisis que considera los posibles tramos entre los que se espera fluctúe la tasa para los periodos que se van a considerar en el estudio, de forma que éstos sirvan de punto de inicio en el proceso de decisión entre las partes que intervienen en el mismo. En el ejemplo se ha establecido un periodo de análisis de tres años, para los cuales se han considerado los siguientes intervalos para los tipos de interés:

Tabla IV.1. Intervalos para las tasas de actualización.

Tasas de actualización		
Año 1	Año 2	Año 3
[0,04; 0,05]	[0,045; 0,06]	[0,05; 0,06]

A continuación se consulta, por ejemplo, a diez expertos que emiten sus valoraciones acerca de los intervalos, haciendo uso del siguiente conjunto lingüístico: $S = \{ S_8 \text{ (Prácticamente Seguro)}, S_7 \text{ (Muy Alto)}, S_6 \text{ (Alto)}, S_5 \text{ (Un poco Alto)}, S_4 \text{ (Medio)}, S_3 \text{ (Un poco Bajo)}, S_2 \text{ (Baja)}, S_1 \text{ (Muy Bajo)}, S_0 \text{ (Prácticamente Nulo)}\}$

Tabla IV.2. Valores lingüísticos: Fluctuación de las tasas. Valores expresados por los expertos.

	[0,04 ; 0,05]	[0,045 ; 0,06]	[0,05 ; 0,06]
e ₁	(S _{6,0}) - (S _{8,0})	(S _{8,0})	(S _{2,0}) - (S _{4,0})
e ₂	(S _{5,0.33}) - (S _{7,-0.37})	(S _{5,0.33}) - (S _{8,0})	(S _{0,0}) - (S _{4,0})
e ₃	(S _{6,0})	(S _{8,0})	(S _{0,0}) - (S _{3,0})
e ₄	(S _{5,0})	(S _{7,0}) - (S _{8,0})	(S _{2,0}) - (S _{4,0})
e ₅	(S _{6,0}) - (S _{8,0})	(S _{6,0}) - (S _{8,0})	(S _{2,0})
e ₆	(S _{8,0})	(S _{8,0})	(S _{0,0}) - (S _{2,0})
e ₇	(S _{8,0})	(S _{5,0}) - (S _{7,0})	(S _{2,0}) - (S _{4,0})
e ₈	(S _{5,0}) - (S _{7,0})	(S _{5,0}) - (S _{6,0})	(S _{5,0}) - (S _{7,0})
e ₉	(S _{8,0})	(S _{1,0.33}) - (S _{3,-0.33})	(S _{7,-0.37}) - (S _{8,0})
e ₁₀	(S _{0,0}) - (S _{1,0})	(S _{5,0}) - (S _{6,0})	(S _{6,0}) - (S _{8,0})

A continuación se procede a obtener un representante para cada intervalo. Para ello se aplica el operador de mayoría lingüístico definido en el tercer capítulo con el objetivo de obtener un valor que represente el conjunto de opiniones recogidas de los distintos expertos de forma mayoritaria.

Extremo [0,04]

$$\phi = (S_8,0) \otimes 0.433 \oplus (S_6,0) \otimes 0.433 \oplus (S_5,0) \otimes 0.1 \oplus (S_5,0.33) \otimes 0.017 \oplus$$

$$\oplus (S_0,0) \otimes 0.017 = (S_7,-0.35)$$

Extremo [0,05]

$$\phi = (S_8,0) \otimes 0.947 \oplus (S_7,-0.33) \otimes 0.0106 \oplus (S_7,0) \otimes 0.0106 \oplus (S_6,0) \otimes 0.0106 \oplus$$

$$\oplus (S_5,0) \otimes 0.0106 \oplus (S_1,0) \otimes 0.0106 = (S_8,-0.15)$$

Tasa futura para el año 1

$$i_1 = [0,04] + (0,01)(\cdot)[0,738;0,872] = [0,04738;0,04872]$$

De igual forma se opera en los periodos restantes, lo que permite establecer la opinión agregada de los expertos obteniendo:

Tasa futura para el año 2

$$i_2 = [0,045] + (0,015)(\cdot)[0,6172;0,8577] = [0,05426;0,05787]$$

Tasa futura para el año 3

$$i_3 = [0,05] + (0,01)(\cdot)[0,1831;0,4362] = [0,05183;0,05436]$$

El siguiente paso precisa establecer unos valores sobre los que compradores y vendedores se encuentren de acuerdo respecto a los posibles *Cash-Flows* libres a obtener en los periodos considerados. Para ello, en primer término cabe partir de unos intervalos para la cuantificación de los CFL que servirán de referencia para solicitar la opinión de expertos en la materia. Estos deben ser establecidos tanto por la parte compradora como por la vendedora. A efectos operativos de la resolución práctica se han establecido los siguientes intervalos indicativos de los posibles CFL en unidades monetarias para los tres periodos de análisis: año 1 [4.000; 6.000]; año 2 [3.000; 6.000]; año 3 [2.000; 5.000]

A partir de las estimaciones anteriores, cabe volver a solicitar la colaboración de expertos para que emitan su opinión mediante evaluaciones lingüísticas tomando posiciones compradoras y vendedoras.

Tabla IV.3. Valoraciones Lingüísticas: Cash-Flow Libres.

	[4.000 ; 6000]	[3.000 ; 6000]	[2.000 ; 5.000]
Comprador			
e ₁	(S _{4,0}) - (S _{6,0})	(S _{2,0}) - (S _{4,0})	(S _{2,0}) - (S _{4,0})
e ₂	(S _{3,-0.33}) - (S _{4,0})	(S _{4,0}) - (S _{7,-0.33})	(S _{0,0}) - (S _{4,0})
e ₃	(S _{5,0})	(S _{1,0}) - (S _{2,0})	(S _{0,0}) - (S _{3,0})
e ₄	(S _{5,0})	(S _{5,0}) - (S _{6,0})	(S _{2,0}) - (S _{4,0})
e ₅	(S _{2,0}) - (S _{4,0})	(S _{4,0}) - (S _{6,0})	(S _{2,0})
Vendedor			

e_1	$(S_7, -0.33) - (S_8, 0)$	$(S_4, 0) - (S_5, 0.33)$	$(S_5, 0.33) - (S_7, -0.33)$
e_2	$(S_5, 0) - (S_6, 0)$	$(S_7, 0) - (S_8, 0)$	$(S_3, 0) - (S_4, 0)$
e_3	$(S_4, 0) - (S_6, 0)$	$(S_6, 0)$	$(S_2, 0) - (S_4, 0)$
e_4	$(S_2, 0) - (S_6, 0)$	$(S_2, 0) - (S_4, 0)$	$(S_2, 0) - (S_6, 0)$
e_5	$(S_5, 0) - (S_6, 0)$	$(S_7, 0) - (S_8, 0)$	$(S_6, 0) - (S_7, 0)$

A continuación, se agregará la información unificada, para lo que nuevamente se usará el operador OWA anterior. Para no reiterar los cálculos, se realizan solamente las operaciones correspondientes al primer período para los compradores.

Extremo [4.000]

$$\phi = (S_5, 0) \otimes 0.625 \oplus (S_4, 0) \otimes 0.125 \oplus (S_2, 0) \otimes 0.125 \oplus$$

$$\oplus (S_1, 0.33) \otimes 0.125 = (S_4, 0.04)$$

Extremo [6.000]

$$\phi = (S_5, 0) \otimes 0.625 \oplus (S_4, 0) \otimes 0.125 \oplus (S_2, 0) \otimes 0.125 \oplus$$

$$\oplus (S_1, 0.33) \otimes 0.125 = (S_4, 0.04)$$

CFL Comprador

$$CFL_1^C = [4.000] + (2.000)(\cdot)[0,4490;0,5185] = [4.898;5.037]$$

Para los vendedores obtenemos

CFL Vendedor

$$CFL_1^V = [4.000] + (2.000)(\cdot)[0,4768;0,6805] = [4.953;5.361]$$

y para los intervalos restantes

Intervalo CFL Comprador-Vendedor [3000, 6000]

$$CFL_2^C = [3.000] + (3.000)(\cdot)[0,388;0,6018] = [4.164;4.805]$$

$$CFL_2^V = [3.000] + (3.000)(\cdot)[0,6527;0,7688] = [4.958;5.306]$$

Intervalo CFL Comprador-Vendedor [2000, 5000]

$$CFL_3^C = [2.000] + (3.000)(\cdot)[0,1666;0,4166] = [2.500;3.249]$$

$$CFL_3^V = [2.000] + (3.000)(\cdot)[0,3379;0,5601] = [3.013;3.680]$$

Un resumen de los cálculos se presenta en la tabla 4.

Tabla IV. 4. Resumen de cálculos.

Tasa de actualización	Año-1	
Intervalo-K	0,040	0,050
Intervalo- ϕ	0,738	0,872
Intervalo-K _{ajustado}	0,04738	0,04872

Cash-Flow Libre	Año-1	
Intervalo-CFL	4.000	6.000
Intervalo- ϕ	0,4490	0,6805
Intervalo-CFL _{ajustado}	4.898,00	5.361,00
Tasa de actualización	Año-2	
Intervalo-K	0,045	0,060
Intervalo- ϕ	0,617	0,858
Intervalo-K _{ajustado}	0,05426	0,05787
Cash-Flow Libre	Año-2	
Intervalo-CFL	3.000	6.000
Intervalo- ϕ	0,3880	0,7688
Intervalo-CFL _{ajustado}	4.164,00	5.306,40
Tasa de actualización	Año-3	
Intervalo-K	0,050	0,060
Intervalo- ϕ	0,183	0,436
Intervalo-K _{ajustado}	0,05183	0,05436
Cash-Flow Libre	Año-3	
Intervalo-CFL	2.000	5.000
Intervalo- ϕ	0,1666	0,5601
Intervalo-CFL _{ajustado}	2.499,80	3.680,30

Nótese como utilizando el operador de mayoría se consigue reducir el intervalo de valores de las variables consideradas en la valoración (tabla 5), lo que nos lleva a que el valor de la empresa derivado de ellos presentará igualmente un intervalo más reducido que si no utilizamos los citados operadores.

Tabla IV.5. Amplitud de los intervalos u horquillas de valores

Tasa de actualización	Año-1	Año-2	Año-3
Amplitud intervalo-K	0,010	0,015	0,010
Amplitud intervalo-K _{ajustado}	0,00134	0,00361	0,00253
Cash-Flow Libre	Año-1	Año-2	Año-3
Intervalo-CFL	2.000,00	3.000,00	3.000,00
Amplitud intervalo-CFL _{ajustado}	463,00	1.142,40	1.180,50

Efectivamente, en la tabla 6 se muestran los cálculos comparativos de las dos versiones tratadas, demostrándose como la utilización de los operadores de mayoría OWA reducen el intervalo de valores posibles estimados de una forma considerable, consiguiendo de esta forma nuestros objetivos. En nuestro ejemplo, si se aplica a la información de partida directamente la expresión clásica del Discounted Cash-Flow se obtiene el siguiente intervalo [8.971; 17.122] con una amplitud de 8.151, mientras que si tratamos la información de la forma propuesta por los operadores de mayoría OWA se obtiene un intervalo sensiblemente más estrecho, esto es [11.514; 14.379] de amplitud 2.864. Obsérvese que la reducción de la amplitud del intervalo proviene del aumento del extremo inferior y de la disminución del superior.

Tabla IV.6. Resultados comparativos.

Valoración	Horquillas de valor		Amplitud
$V_{E(CFL)}$	8.971	17.122	8.151
$V_{E(ajustado)}$	11.514	14.379	2.864

IV.1.3 Conclusiones

La utilización de operadores de mayoría OWA en contextos de incertidumbre, riesgo y donde las estimaciones de consenso están basadas en opiniones subjetivas (formación y experiencia) de los agentes del mercado, se traduce en una mayor facilidad para llegar a un valor de consenso o equilibrio de una forma más rápida y objetiva. Así, estos operadores lingüísticos lo que hacen realmente es sintetizar en cierta medida la información de partida, permitiendo un acercamiento de posturas que facilita la obtención de un valor de consenso o la pronta consecución de un precio de equilibrio en el mercado. Además, generan a su vez, posibilidades de arbitraje y una reducción la volatilidad. En otras palabras, se genera una información de mayor calidad que permite decisiones más eficientes, lo que a su vez redundará en una mayor eficiencia y liquidez del mercado.

Finalmente, indicar que la metodología propuesta es absolutamente flexible y adaptable a cualquier escenario de decisión tanto empresarial como de mercado.

IV.2 IMPUTACIÓN DE DATOS

La ausencia, pérdida y eliminación accidental de datos son problemas habituales que afectan a los sistemas de bases de datos, siendo especialmente sensibles aquellas bases de datos donde hay que extraer información estadística para tomar decisiones, tales como las bases médicas y sociales. El origen de este problema radica en diversos factores: problemas en la recolección de la información, errores motivados por el soporte físico, problemas con el equipo de investigación o, en los casos de encuestas y estudios sociales, por la negativa de los individuos encuestados a responder algunas preguntas por falta de información,

desconocimiento, vergüenza o temor, entre otras. El hecho es que la ausencia de datos dentro de un proyecto de investigación es algo rutinario y frecuente que no puede obviarse cuando se procede al análisis estadístico del mismo (Ibrahim et al., 2005).

En este sentido, la imputación de datos perdidos se ha convertido, en las últimas décadas, en un área de la estadística que centra la atención y el esfuerzo de investigadores, de forma que en la actualidad es fácil encontrar trabajos en la línea del desarrollo de nuevas estrategias y procesos con el objetivo de solucionar este problema (Little & Rubin, 1990; GSS, 1996; Raghunathan et al. 2001; Schafer & Graham, 2002; Durrant, 2005; Ibrahim et al., 2005; Peláez et al., 2008).

Una estrategia simple y tradicionalmente muy usada, es ignorar completamente aquellas muestras que presenten algún valor perdido o eliminado, reduciéndose el tamaño útil del conjunto de datos. La experiencia ha demostrado que la eliminación de los casos incompletos (*listwise*) del conjunto original de datos produce el grave inconveniente de introducir sesgos en el estudio a realizar, especialmente cuando la distribución de los datos faltantes no es aleatoria (Rubin, 1987; Schafer and Graham, 2002; Allison, 2001).

Indudablemente, los modelos de imputación deben ser aplicados con cautela, siendo necesario un análisis previo de los datos a tratar para poder detectar los daños potenciales que puede producir una imputación inapropiada. Es muy importante reducir el impacto de los valores imputados sobre el total de la base de datos. En este sentido, los procesos definidos en los capítulos anteriores pueden aportar una importante ventaja al incluir la semántica de mayoría al proceso de

imputación. En esta sección se realiza una breve introducción a los métodos usados en las ciencias sociales para compensar el problema de los datos faltantes. Además se propone una nueva técnica basada en el enfoque de los procesos de mayoría presentados en este trabajo.

IV.2.1 Métodos de Imputación

IV.2.1.1 Tipología de los elementos perdidos y sin respuesta

Los elementos eliminados o faltantes en una base de datos pueden ser clasificados en diferentes categorías. En general, el patrón de la pérdida de datos puede ser univariado, cuando los valores perdidos únicamente afectan a una variable del estudio, o multivariado, en el caso de que el problema se extienda sobre varios campos de la base de datos. La elección del método de imputación dependerá del patrón subyacente en la pérdida de datos, de forma que el estudio de la distribución de dichos patrones se hace imprescindible para la correcta definición y aplicación de un modelo de imputación.

Si la base de datos se interpreta como una matriz, en donde las filas son las unidades de observación y las columnas representan a las variables de interés, es sencillo establecer un análisis visual que permite identificar los patrones de pérdida de datos.

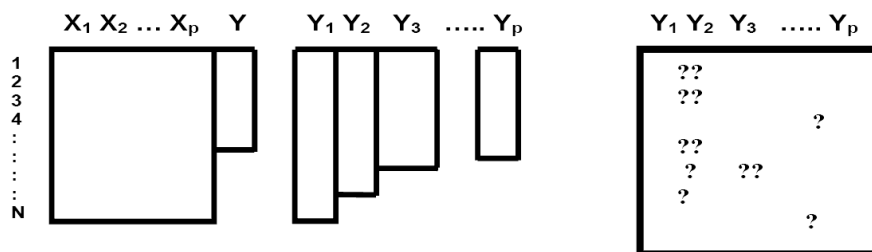


Figura 4.1. Patrones de Pérdida de Datos Univariados.

En la primera representación, la ausencia de datos se concentra en la variable Y , lo cual se corresponde con el patrón univariado, donde todas las variables del muestreo son observables a excepción de la característica Y .

En la segunda figura la omisión sigue un patrón escalonado o monótono, característico de estudios longitudinales, en donde Y_j representa el valor de la variable en la j -ésima ronda del estudio.

Finalmente, la tercera imagen muestra un patrón aleatorio, en el que en cualquier celda pueden existir datos faltantes; es decir, las omisiones no están dispuestas en una forma predeterminada dentro del valor de estudio Y .

En el caso de que la falta de respuesta o pérdida de datos ocurra en dos o más variables en distintas zonas de la matriz, el patrón será multivariado. Consideremos X_1, X_2, \dots, X_p y el patrón que se presenta en la figura IV.2, en donde X_1 y X_2 tienen datos para distintos registros. Esta situación corresponde a un patrón con parámetros no identificados.

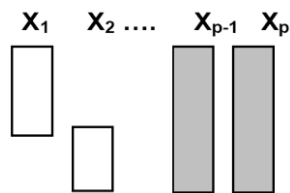


Figura 4.2. Patrón con parámetros no identificados Multivariado.

El supuesto de que los datos faltantes siguen un patrón completamente aleatorio (*Missing Completely at Random*, MCAR) fue introducido por Rubin (1987) y

Little & Rubin (1990), y es el supuesto que se asume en la mayoría de los algoritmos de imputación. Esta consideración es válida para el caso de la pérdida y borrado de datos, sin embargo, es frecuente que en la recolección de información por consulta estadística esta hipótesis no se satisfaga, ya que la falta de respuesta suele estar asociada a características específicas de los encuestados.

IV.2.1.2 Procedimientos de Imputación

Un proceso de imputación consiste en completar información perdida con valores válidos con el objetivo de producir un conjunto completo de datos. Dentro de la clasificación de los métodos de imputación se distingue entre métodos deterministas y estocásticos (o aleatorios). Los métodos deterministas producirán siempre la misma imputación para conjuntos de datos de iguales características. Mientras que los métodos estocásticos pueden producir diferentes soluciones para el mismo conjunto.

Como se ha indicado, el método apropiado de imputación de datos depende tanto del patrón como de la causa de la pérdida de datos. Por tanto, es esencial identificar claramente las circunstancias por las que se produce la ausencia de datos en las variables de estudio, de manera que se pueda seleccionar el método más adecuado para proceder a la imputación de los datos ausentes.

Para realizar una imputación efectiva es necesario, en la mayoría de los casos, realizar un estudio estadístico previo sobre las variables auxiliares que puedan tener relación con el valor a completar. Este estudio preliminar del sistema a imputar puede ser en ocasiones excesivamente complejo según el método de imputación seleccionado, lo que hace que en gran número de casos se utilice una metodología inapropiada para el problema a resolver.

Otro aspecto a considerar ante la elección de un método de imputación es el análisis de los datos que se desea realizar una vez finalizado el proceso de recuperación de información, por ejemplo, si se desean obtener estimaciones sobre medias, totales, proporciones u otros tipos de estadísticas. Además, también deben tenerse en cuenta aspectos relativos a la implementación del método así como su complejidad computacional. Una evaluación completa sobre los criterios para la elección de los métodos de imputación se realiza en Chambers (2003).

A continuación se describen los métodos más comunes de imputación.

Métodos de imputación simple

La imputación simple se encuentra entre las más usadas dentro de los sistemas tradicionales para resolver el problema de la pérdida de datos. Esquemáticamente se pueden agrupar de la siguiente manera:

Métodos de sustitución por el valor medio:

- del grupo (media vertical),
- del elemento considerado (media horizontal),
- de registros emparejados o similares.

En estos procedimientos se sustituyen los valores ausentes por el valor medio del resto de observaciones de la base de datos (media vertical) o por el valor medio

de las observaciones del propio elemento (media horizontal), o por el valor medio de las observaciones en registros similares al que presenta la ausencia de datos.

Son aplicables cuando el patrón de pérdida de datos es intermitente (media vertical y horizontal) o longitudinal (media emparejada) y el mecanismo es completamente al azar. La sustitución simple por la media vertical es apropiada en cuestionarios multidimensionales en los que se produce la ausencia de un ítem en una o más subescalas. La sustitución por el valor medio de elementos similares requiere la búsqueda de covariables que permitan garantizar la semejanza entre los registros, pero cuando se produce resulta uno de los métodos de imputación de datos ausentes más aconsejable. Estos procedimientos tienden a disminuir la varianza (excepto la media emparejada) de la muestra ya que infraestiman la variabilidad de las observaciones, lo que puede redundar en un incremento del error de tipo II (falso negativo) cuando sólo se aplica a uno de los grupos de comparación, o aumentar el error de tipo I (falso positivo) si se aplica en todos los grupos comparados.

Métodos de sustitución puntual de datos ausentes:

- técnicas Hot Deck,
- vecindario,
- imputación LOCF (last observation carried forward),
- imputación WOCF (worst observation carried forward),
- imputación MVCF (minimum value carried forward).

En estos procedimientos se sustituyen los valores ausentes por un valor puntual extraído de observaciones del mismo registro o de otros elementos existentes en la base de datos. Los procedimientos basados en el análisis de observaciones se realizan con datos del mismo registro (último valor disponible, el peor o mínimo valor observado), mientras que el procedimiento Hot Deck imputa un valor aleatorio extraído de la base de datos. Las técnicas basadas en vecindario imputan la ausencia con los valores observados en el registro más semejante de la base de datos. Son aplicables cuando el patrón de pérdida de datos es intermitente (Hot Deck) o longitudinal (vecindario e imputación de valores observados) y el mecanismo es al azar, en el primer caso, o completamente al azar en los otros casos.

Dado que la sustitución por el último valor observado asume que los valores que toma la variable analizada son constantes o estables en el tiempo (asunción errónea con bastante frecuencia), este procedimiento puede no ser apropiado en estudios sociales, ya que tiende tanto a sobreestimar como a infraestimar el valor real ausente, lo que se traduce en incremento de error de tipo I o de tipo II. Aunque existe la posibilidad, conservadora, de imputar sobre la peor observación o el valor mínimo, éste procedimiento no es aconsejable para la imputación de datos ausentes ya que es superado por otros métodos disponibles (Raghunathan et al. 2001; Schafer & Graham, 2002; Ibrahim et al., 2005).

Los procedimientos que imputan los datos ausentes con los valores de otro registro seleccionado aleatoriamente o por los del ítem más parecido en la base de datos son, en general, más aconsejables de utilizar que los anteriores, ya que tienden a no modificar la varianza de la muestra, y la probabilidad de que el registro adopte en los valores ausentes el valor real observado en otros ítems del

estudio es bastante plausible. No obstante, pueden no estar justificados para algunos tipos de ausencia de datos.

Métodos de regresión simple o multivariante.

El procedimiento de regresión, simple o multivariante, es aplicable tanto cuando el patrón de pérdida de datos es intermitente como longitudinal, pero el mecanismo de ausencia debe ser al azar. Consiste, también, en la sustitución puntual de datos ausentes, pero la imputación se realiza a partir de otras variables de la base de datos que funcionan como covariables, incluida la misma variable que se analiza. El ejemplo más sencillo sería la predicción del valor ausente a partir de los valores observados para el mismo registro en otros estudios anteriores. Si la relación de las covariables con la variable dependiente no es fuerte, es decir, no hay una correlación buena, los valores estimados pueden ser espurios. Otro problema es que el procedimiento tiende a reducir variabilidad (menor varianza), pudiendo aumentar el riesgo tanto de error de tipo I como de tipo II.

Métodos de imputación múltiple.

Uno de los principales problemas de los métodos de imputación simple es que tienden a infraestimar la varianza, dado que reemplazan los valores ausentes por valores ya existentes en la base de datos o, en el caso de la regresión, por valores estimados a partir de covariables que pueden disminuir la variabilidad espontánea de las observaciones en caso de haberse llevado a cabo. La imputación múltiple, manteniendo las ventajas de los métodos de imputación simple, elude el problema de infraestimación de la varianza de la muestra. No obstante, si la imputación múltiple no se realiza de la forma adecuada, puede incurrir en graves errores de

estimación. La imputación múltiple se utiliza para patrones de ausencia de datos tanto intermitentes como monótonos, y cuando el mecanismo de pérdida de datos es al azar.

La estrategia básica de este método consiste en generar de 10 a 20 opciones distintas de valores para el dato ausente, manteniendo la variabilidad de la medida y el nivel de incertidumbre de las observaciones ausentes. La estrategia general de la imputación múltiple se puede resumir en cuatro grandes pasos: selección del método de imputación (explícito o implícito), generación de conjuntos de valores imputados (generalmente entre 10 y 20), análisis de los diferentes conjuntos de valores imputados y combinación de los resultados de estos análisis para obtener una estimación promedio.

Entre los métodos de imputación múltiple se encuentran los modelos de regresión explícita, que incorporan un término de error aleatorio a los coeficientes de las variables estimadas, el método de remuestreo por aproximación bayesiana (Approximate Bayesian Bootstrap), o el método de Monte Carlo de las cadenas de Markov.

IV.2.2 Imputación de Mayoría

Como se ha indicado, el problema de la pérdida de datos, ya sea por omisión o borrado, es un problema crítico para la realización de análisis estadísticos sobre la mayoría de las bases de datos procedentes de estudios sociales (encuestas) y sistemas donde han podido producirse fallos de soporte hardware. La solución planteada a estos problemas puede ser compleja y no aportar los resultados esperados, siendo necesarios análisis sobre la forma en que se produjo la pérdida

de información así como la distribución de los valores faltantes y del estudio posterior a realizar. Por esta razón se plantea aplicar los procesos de mayoría OWA definidos como técnica de imputación, que al producir una agregación basada en una representación de la semántica de mayoría, donde se incluyen tanto los valores más predominantes en la base de datos como aquellos menos representativos, debe producir valores aceptables sin necesidad de incluir costosos sistemas de análisis.

La semántica de mayoría debe mejorar los resultados de las imputaciones basadas en el valor medio ya que al considerar los valores más predominantes el efecto de los valores extremos será menor, además se eliminan los problemas de distribución. No obstante, por su definición la disminución de la varianza podría ser mayor de la deseada, solucionándose este inconveniente utilizando un algoritmo de agrupación basado en distancias.

Así mismo es una opción válida para usarse como agregación en los métodos multivariantes y en la imputación múltiple para la generación de conjuntos de valores imputados, por las ventajas que aporta el poder modelar de conceptos borrosos a través de su combinación con cuantificadores lingüísticos.

La aplicación de los operadores de mayoría OWA en el área de las técnicas de imputación es fácil y no implica modificaciones importantes de los métodos tradicionales. El cambio, en la mayoría de los casos, consistirá en sustituir el operador de agregación usado en el método elegido por el correspondiente operador de Mayoría con la semántica deseada para el problema. Por ejemplo, para el método de sustitución por el valor medio del grupo (media vertical), la media aritmética se cambia, por ejemplo, por el operador AM-OWA, con la ventaja de poder modelar el concepto borroso de mayoría a través de los

cuantificadores lingüísticos, como por ejemplo el cuantificador *muchos*, de forma que se considerarán muchos de los valores (aquellos más importantes) al realizar la agregación, con la posibilidad añadida de realizar una cuantificación individual o de grupo

Combinando las propiedades específicas de los operadores de mayoría OWA y los métodos de imputación descritos, se obtienen conjuntos de datos más consistentes para los elementos faltantes, mejorando la varianza y disminuyendo a su vez la ocurrencia de problemas del tipo I y II. En la figura IV.3 se muestra cómo el rango de valores producidos por los operadores cuantificados engloba tanto a los operadores de mayoría OWA como a los operadores de agregación tradicionales.

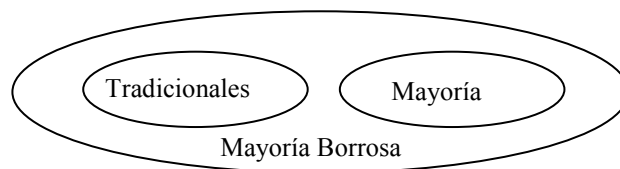


Figura 4.3. Representación de los procesos de agregación tradicionales, de Mayoría y Mayoría Borrosa.

IV.2.2.1 Ejemplo de Aplicación.

Con el objetivo de comprobar las ventajas de la aplicación de los operadores de mayoría se realizaron pruebas sobre una base de datos sobre la que se realizaron borrados aleatorios en una de las variables de análisis para simular la pérdida de datos.

El conjunto de datos usado para el análisis se tomó de un sistema médico, donde se incluyen datos demográficos, terapéuticos y de supervivencia de aproximadamente 3.700 pacientes. Los porcentajes de estudio se basaron en pérdidas de datos del 5, 10 y 20 por ciento utilizando un patrón univariado aleatorio. En la figura IV.4 se muestra una captura de los registros con pérdida de información.

7	7	10	8	10
7	7	10	8	0
7	7	0	10	10
8	8		8	8
8	8	8	0	8
8	8	8	10	10
10	10	10	8	7
0	0	7	8	10
0	0	10	10	10
8	8	10	0	7
8	8	7	10	8
10	10	8	7	8
7	7	8	7	0
8	8	0	7	10
0	0	10	8	10
7	7	10	8	10
8	8	10	10	7
8	8	7	10	8
0	0	8	0	0

Figura 4.4. Captura de parte de los registros correspondientes al patrón de pérdida univariado aleatorio.

En la siguiente figura se muestra la distribución de los valores para uno de los muestreos estudiados en este ejemplo.

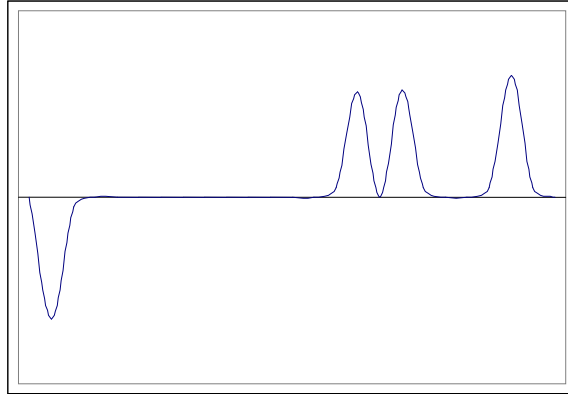


Figura 4.5. Representación de los valores para una de las columnas a imputar.

VI.2.2.2 Análisis de los resultados.

Para este ejemplo se implementaron los operadores clásicos de mayoría OWA sin uso de cuantificadores, comparándose con el método tradicional basado en el valor medio del grupo y de registros emparejados o similares.

Para el caso de la aplicación del valor medio, los resultados fueron los esperados, con errores relativos bajos al comparar la base de datos original con la imputada. La varianza del nuevo proceso fue mejor que la producida por el valor medio para los casos donde existía mayor porcentaje de pérdida de información.

Para poder realizar la comparación con el método de valor medio con registros emparejados, se agruparon los datos en función de los siguientes parámetros:

- Edad del paciente.
- Tipo de Tratamiento.

- Tamaño de la lesión.

En este caso los resultados fueron similares a los producidos en el caso anterior, con un crecimiento del error relativo proporcional al porcentaje de datos faltantes y mejorándose el sesgo producido por la imputación tradicional.

IV.2.3 Conclusiones

En esta sección se ha realizado una breve introducción a las técnicas más usadas para solucionar el problema de la pérdida de datos, mostrándose las principales ventajas y desventajas de los diferentes métodos definidos en la imputación de datos.

En este ámbito, el uso de los operadores de mayoría OWA se ha presentado como una alternativa válida que permite añadir conceptos borrosos a las técnicas actualmente usadas. Los resultados obtenidos con la aplicación del operador son muy satisfactorios, presentando valores de varianza adecuados y reducidos errores relativos al compararlo con el sistema de prueba.

Finalmente, indicar que la metodología propuesta es absolutamente flexible y adaptable a cualquier proceso de imputación actual, con la ventaja añadida de poder representar conceptos lingüísticos a través de la cuantificación individual y de grupo definida en el segundo capítulo.

IV.3 TRATAMIENTO DE IMÁGENES

La información visual juega un papel muy importante en la comunicación humana, de ahí que no sea de extrañar el gran interés mostrado por el desarrollo

de sistemas para el tratamiento digital de imágenes. Sus aplicaciones son fundamentales e imprescindibles en multitud de campos como son la ingeniería, física, biología, medicina, etcétera. Dentro del tratamiento de imágenes, una de las áreas sobre las que se realiza un mayor esfuerzo es la eliminación del ruido en las imágenes digitales, tanto por sus implicaciones comerciales como científicas, por ejemplo, los sistemas de visión artificial (Trucco & Verri, 1998).

Por ruido se entiende cualquier entidad en las imágenes, datos o resultados intermedios, que no son interesantes para su computación posterior. Una de las técnicas más usadas para el tratamiento del ruido consiste en la aplicación de operadores lineales de convolución (Gonzalez & Woods, 1993). Estos operadores o filtros eliminan el ruido en las imágenes calculando un nuevo valor de intensidad para cada píxel mediante una convolución de los píxeles adyacentes, por ejemplo, mediante la media aritmética (Gonzalez & Woods, 1993; Jain et al. 1995).

El propósito de esta sección es presentar la aplicación de los procesos de mayoría introducidos en el segundo capítulo como una opción válida para su aplicación como operador de convolución para la eliminación del ruido en imágenes digitales. Así mismo se pretende analizar su funcionamiento en comparación con los filtros más comúnmente usados con el objetivo de mostrar en qué casos puede ser más idónea su utilización.

IV.3.1 Tipos de Ruidos y Filtros en Imágenes Digitales

A continuación se realiza una breve presentación de los distintos tipos de ruidos que suelen encontrarse en imágenes digitales y los filtros más relevantes que se suelen aplicar sobre las mismas que sirva como introducción al problema.

IV.3.1.1 Tipos de Ruidos

Sea una imagen G definida como la matriz suma de la imagen limpia I con un ruido n , se clasifican los ruidos en función de n como sigue:

Ruido Gaussiano Aditivo

El ruido Gaussiano se define como: $G(i, j) = I(i, j) + n(i, j)$, donde $n(i, j) \sim N(m, \sigma^2)$.

La función de densidad $f(x)$ de una gaussiana de media m y varianza σ^2 es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right]$$

En imágenes la media, m , del ruido suele ser cero. El 70% de los datos se encuentran en el intervalo $(m-\sigma, m+\sigma)$ y el 95% en el intervalo $(m-2\sigma, m+2\sigma)$.

Ruido Uniforme

El ruido Uniforme se define como: $G(i, j) = I(i, j) + n(i, j)$, donde $n(i, j) \sim U[a, b]$.

La función de densidad $f(x)$ de una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La media de esta distribución es $(a+b)/2$ y su varianza vale $(b-a)^2/12$. Normalmente $b = -a$.

Ruido de Sal y Pimienta

El ruido de Sal y Pimienta se define como:

$$G(i, j) = \begin{cases} I(i, j) & \text{si } x < p \\ A & \text{si } p \leq x \leq q \\ B & \text{si } q \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Donde $x \sim U[0,1)$, $0 \leq p \leq q \leq 1$, A y B son número fijos, usualmente $A = 255$ y $B = 0$.

Observemos que $(q-p)$ es la probabilidad de pasar al valor A (255 y por tanto sal) y $(1-q)$ es la probabilidad de pasar a B (0 y por tanto pimienta), p es la probabilidad de permanecer igual.

Ruido Multiplicativo

El ruido Multiplicativo se define como: $G(i, j) = I(i, j) + \lambda I(i, j)$, donde $\lambda \sim U([a, b])$ (normalmente $b = -a$).

Este tipo de ruido es dependiente de la señal, cuanto más señal, más ruido.

Modelos de ruido multiplicativo son:

Gaussiano multiplicativo. $G(i, j) \sim N(I(i, j), \alpha I(i, j)) \alpha > 0$.

Poisson. $G(i, j) \sim P(I(i, j))$. Por ejemplo este tipo de ruido es el que predomina en cámaras CCD.

IV.3.1.2 Tipos de Filtros

El objetivo de los filtros es que dada una imagen G , se proceda a minimizar el componente n (eliminarlo, si fuera posible) sin alterar significativamente I . A continuación se presentan los filtros más relevantes que suelen aplicarse en imágenes digitales.

Filtrado Lineal

Sea G una imagen de tamaño $M \times N$, la versión filtrada lineal de G , que notaremos I_e , será la estimación de I dada por:

$$I_e(i, j) = \sum_{h=-m/2}^{m/2} \sum_{k=-n/2}^{n/2} A(h, k) \cdot G(i-h, j-k)$$

Donde A es el núcleo de convolución.

Dos tipos de filtrado lineal se pueden distinguir:

Filtrado o Alisamiento por Promedio

$$A_{\text{medio}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alisamiento Gaussiano.

$$A_{\text{gaussiano}}(h, k) = \text{cte} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{h}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{k}{\sigma_y} \right)^2 \right\} \right],$$

$$\text{con } -\frac{m}{2} \leq h \leq \frac{m}{2}, \quad -\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2}$$

Donde la cantidad *cte* se calcula para que $\sum_h \sum_k A_{\text{gaussiano}}(h, k) = 1$

Filtrado no Lineal

El filtrado no lineal comprende a aquellos filtros cuyo funcionamiento no puede ser modelado por una convolución. En algunos casos este tipo mejora el filtrado lineal pero no siempre son la solución.

Un filtro no lineal comúnmente usado es la mediana que sustituye cada valor de la imagen por la mediana de los valores que lo rodean en una ventana. La ventana suele ser de tamaño 3x3 o 5x5. Algunas de las ventajas del filtro mediano es que no emborrona los bordes.

IV.3.2 Aplicación del Operador de Mayoría OWA al Filtrado de Imágenes Digitales

Con el objetivo de comprobar cuál es el comportamiento del filtro de imágenes propuesto se realizan una serie de pruebas sobre un conjunto de imágenes.

El banco de imágenes usado para el estudio se tomó del que incorpora la herramienta de análisis numérico Matlab. Además se usaron imágenes de alta resolución (10 megapíxeles) y cartas de ajuste para pruebas más exhaustivas.

Los test realizados consistieron en aplicar a cada imagen ruidos de Gauss, sal y pimienta, poisson y granular usando la opción de matlab *imnoise* con las opciones y proporciones (ruido alto, medio y bajo) que se muestran a continuación:

Gauss

- *imnoise*(imagen, 'gaussian', 0, 0.01);
- *imnoise*(imagen, 'gaussian', 0, 0.006);
- *imnoise*(imagen, 'gaussian', 0, 0.002);

Granular

- *imnoise*(imagen, 'speckle', 0.04);
- *imnoise*(imagen, 'speckle', 0.01);

- `imnoise(imagen, 'speckle', 0.005);`

Poisson

- `imnoise(imagen, 'poisson');`

Sal y Pimienta

- `imnoise(imagen, 'salt & pepper', 0.10);`
- `imnoise(imagen, 'salt & pepper', 0.05);`
- `imnoise(imagen, 'salt & pepper', 0.01);`

Sobre cada imagen modificada se aplicaron los lineales media y gauss; el filtro no lineal mediana; y finalmente, el filtro desarrollado basado en el operador AM-OWA definido en el segundo capítulo, usando como vector de pesos la media aritmética ($w_i = \frac{1}{n}$). Además se realizaron pruebas sobre la dispersión que cada filtro introduce en las imágenes y se estudió la recuperación real de información en los píxeles de las imágenes. El análisis que se muestra en esta sección se centra en las pruebas realizadas sobre el error cuadrático de cada imagen una vez aplicado el ruido y el filtro con respecto a la imagen original como estimador de la varianza del ruido.

IV.3.2.1 Ejemplo visual: Fotografía en Blanco y Negro

Para ilustrar visualmente los resultados producidos se muestran a continuación las imágenes generadas por los distintos filtros sobre una fotografía en escala de grises (500 x 667). Además, se presentan los valores del error cuadrático medio para las diferentes imágenes junto con las proporciones de ruido.

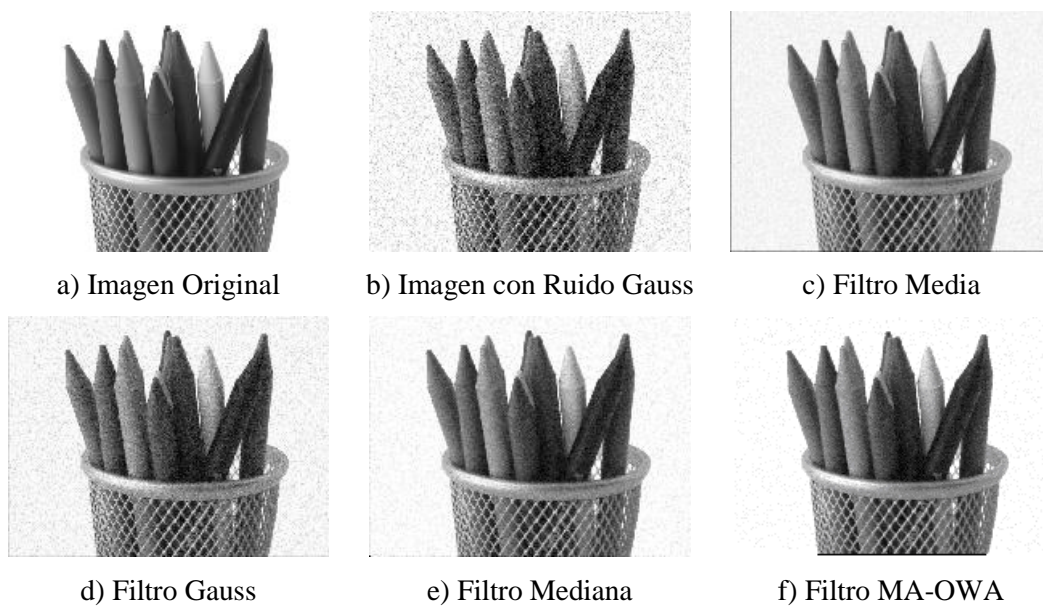


Figura 4.6. Aplicación de ruido de Gauss alto y filtros aplicados.

Tabla IV.7. Resultados comparativos.

Media	Gauss	Mediana	AM-OWA	Error Introducido
131,7523	229,3345	105,0838	89,4292	469,8643
91,7210	139,9717	69,7442	65,3768	284,4154
52,2172	50,3025	33,3043	42,8157	96,4629

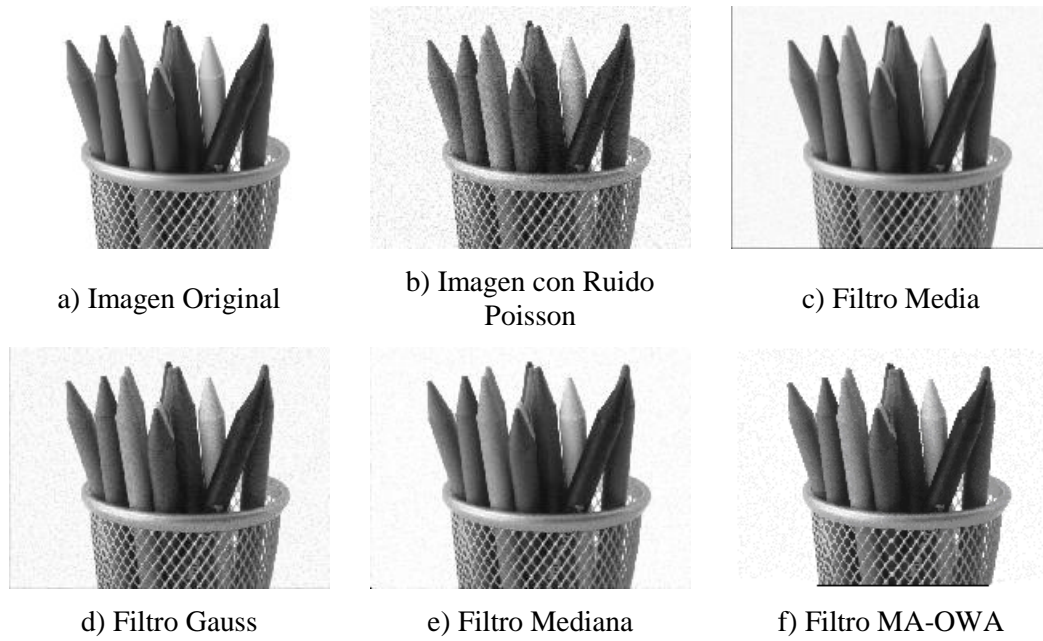


Figura 4.7. Aplicación de ruido de Poisson alto y filtros aplicados.

Tabla IV.8. Resultados comparativos.

Media	Gauss	Mediana	AM-OVA	Error Introducido
63,2778	63,0428	36,0907	60,7075	112,8944





d) Filtro Gauss



e) Filtro Mediana



f) Filtro MA-OWA

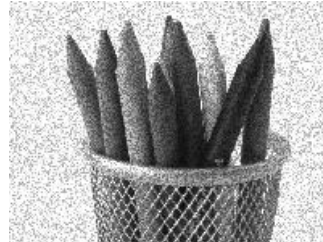
Figura 4.8. Aplicación de ruido de Sal y Pimienta alto y filtros aplicados.

Tabla IV.9. Resultados comparativos.

Media	Gauss	Mediana	AM-OWA	Error Introducido
0,0004	0,0011	0,0000	0,0003	0,0026
0,0002	0,0006	0,0000	0,0001	0,0013
0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0003



a) Imagen Original



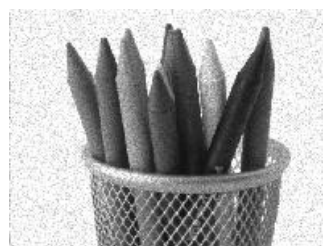
b) Imagen con Ruido Granular



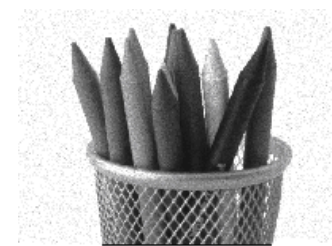
c) Filtro Media



d) Filtro Gauss



e) Filtro Mediana



f) Filtro MA-OWA

Figura 4.9. Aplicación de ruido Granular alto y filtros aplicados.

Tabla IV.10. Resultados comparativos.

Media	Gauss	Mediana	AM-OWA	Error Introducido
353,6831	518,5057	272,6521	125,6659	890,7853
113,2713	134,0322	79,9696	56,4850	224,9416
72,1071	68,5732	45,6890	43,7193	112,0134

IV.3.2.2 Análisis de los resultados

Tras ejecutar los distintos filtros sobre el banco de imágenes descrito anteriormente, se comprobó que el funcionamiento del nuevo filtro implementado producía valores muy satisfactorios en comparación con los filtros tradicionales.

Para el ruido de gauss, tanto para proporciones altas como medias de ruido los mejores resultados fueron producidos por el filtro AM-OWA, siendo, en el caso de ruido bajo el mejor resultado para el filtro no lineal aplicado.

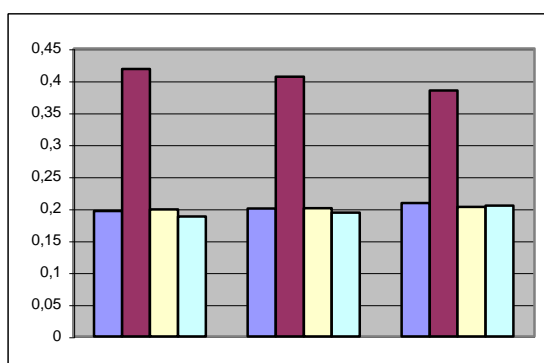


Figura 4.10. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruidos alto, medio y bajo gauss.

En el caso del ruido sal y pimienta, debido a la distribución y características propias de este ruido, los mejores resultados se produjeron, como era de esperar,

cuando se aplicó el filtrado no lineal por mediana, teniendo, a su vez, el filtro propuesto un comportamiento muy aceptable con resultados superiores a los otros filtros lineales.

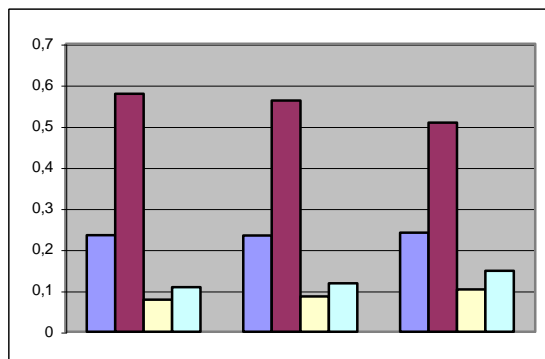


Figura 4.11. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruidos alto, medio y bajo de sal y pimienta.

El comportamiento del operador de mayoría con el ruido de poisson produjo los peores resultados de todos los experimentos realizados, con errores más altos en promedio que todos los demás filtros aplicados.

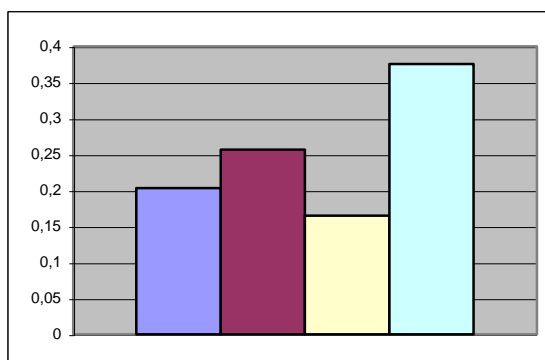


Figura 4.12. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruido poisson.

Con el ruido granular, los mejores resultados se obtuvieron con el filtro lineal media, siendo el siguiente mejor filtro el propuesto con resultados similares, sólo en las situaciones con poco ruido, los resultados fueron mejores en promedio con los filtros media y mediana que con el propuesto.

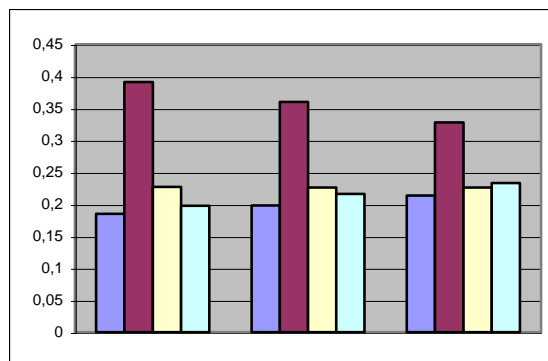
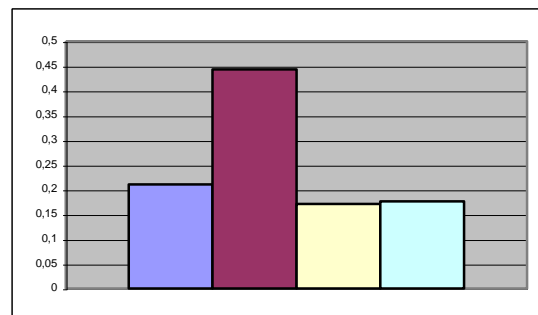
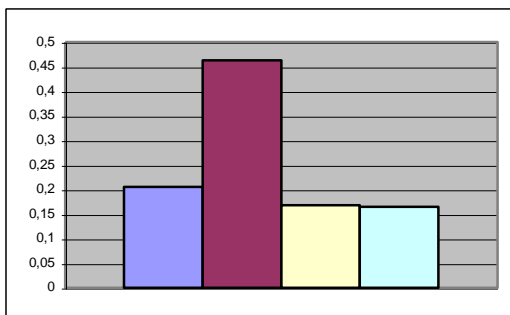


Figura 4.13. Error cuadrático normalizado para los filtros Media, Gauss, Mediana y AM-OWA para ruidos alto, medio y bajo granular.



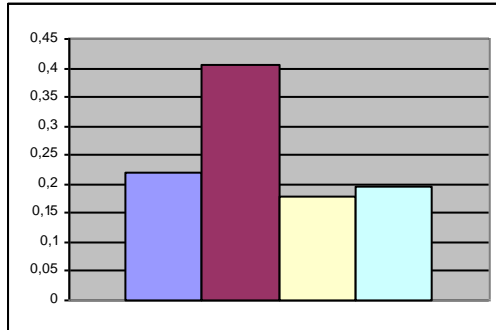


Figura 4.14. Comparativa de los promedios de aplicar los operadores de convolución a todos los tipos de ruido alto, medio y bajo respectivamente.

IV.3.3 Conclusiones

En esta sección se ha presentado una nueva aplicación del operador MA-OWA, en concreto, dicho operador ha sido utilizado como filtro para la eliminación de ruido en imágenes digitales.

Los resultados obtenidos muestran que dicho operador obtiene mejores resultados que otros operadores, como son la mediana, la media o gauss, cuando es aplicado en imágenes con porcentajes de ruido alto y medio, teniendo buenos resultados en imágenes con poca cantidad de ruido. La principal ventaja que aporta es su buen comportamiento independientemente del tipo y cantidad de ruido que se presente, permitiendo al usuario disponer de una herramienta global para el tratamiento de la imagen.

A los buenos resultados obtenidos, se añade la flexibilidad que se aporta en el caso de utilizar conceptos borrosos a través de su combinación con cuantificadores lingüísticos y la posibilidad de añadir distintas semánticas de agregación en los procesos de convolución.

Conclusiones Y Futuros Trabajos

En este trabajo se han estudiado y analizado los problemas que subyacen en los sistemas de toma de decisión social, donde se ha remarcado la importancia de obtener una opinión global que sintetice las opiniones de la mayoría de los decisores en los problemas de toma de decisión en grupo. Para ello se ha realizado una definición exhaustiva de los distintos operadores usados en toma de decisión, presentándose los principales problemas y críticas realizadas a los mismos en la literatura. Dicho análisis ha mostrado que la definición usual de los operadores OWA basada en los cuantificadores lingüísticos no refleja la semántica de mayoría usada en los problemas de toma de decisión social, pudiendo producir problemas de negociación y distribución.

Para solucionar estos problemas se han propuesto los operadores de agregación social de mayoría OWA, definiéndose la estrategia de agregación a seguir por esta familia de operadores. Además se ha realizado una generalización de estos

operadores de forma que se consigue trasladar las propiedades y ventajas de estos procesos de agregación a otras familias OWA no neat y OWG, definiéndose nuevas características y propiedades de interés.

Estas nuevas definiciones se han completado con el diseño de un nuevo proceso de cuantificación con el objetivo de introducir el concepto borroso de cuantificador lingüístico en estas familias de operadores, aportando la ventaja de ser un proceso extensible a cualquier tipo de operador de agregación. En esta definición se han incluido dos estrategias de cuantificación: Individual, para aquellos problemas de toma de decisión en grupo donde no existen restricciones sociales, donde el cuantificador se aplica sobre el total de elementos a agregar de forma individual. Y en grupo, definida para aquellos problemas donde es premisa del proceso de decisión que exista al menos un representante de cada grupo de opinión.

Además se ha incluido una nueva técnica de normalización de pesos cuantificados, que permite introducir la semántica del cuantificador en el proceso de normalización.

En el tercer capítulo, se ha analizado el operador de agregación lingüístico de mayoría desde el punto de vista de los procesos de toma de decisión social. Para ello se han comprobado la satisfacción de los principales axiomas y propiedades que garantizan soluciones admisibles para los procesos de decisión social. Mostrándose que el operador es adecuado para su uso en los procesos de toma de decisión con la posibilidad de incluir información lingüística.

A continuación se han propuesto dos enfoques alternativos al modelo de agregación para el modelo directo (dependientes e independientes del valor de

preferencia). Estos nuevos enfoques añaden al modelo directo las cualidades de los procesos de mayoría para los sistemas de toma de decisión. Los enfoques presentados se componen de un proceso iterativo que va formando clusters de valores en base a medidas de afinidad o distancia. En este apartado se han considerado las medidas de afinidad D^{or} y C^{or} para determinar la afinidad entre valores y guiar el proceso de agrupación de forma que la utilización conjunta de ambas medidas permite obtener un valor de afinidad inequívoco entre cada par de decisores permitiendo guiar el proceso de agrupación de forma clara y sencilla.

La utilización el operador de mayoría en entornos lingüísticos que usan el modelo directo como método de resolución se ha ilustrado aplicándose en un ejemplo completo tanto de forma tradicional así como usando el nuevo modelo de agregación propuesto.

Finalmente, se ha incluido un capítulo de aplicaciones prácticas donde se han aplicado los procesos definidos en problemas de decisión y agregación de distinta índole: valoración de empresas, imputación de datos y tratamiento de imágenes. De los que se puede concluir el buen comportamiento, versatilidad y posibilidades reales de aplicación de los procesos presentados.

Como proyectos futuros, se plantea el uso de los sistemas aritméticos y geométricos definidos en este trabajo en el proceso analítico jerárquico (AHP) tanto en su primer nivel (aritmético) como a nivel agregado (geométrico) para implementar sistemas de consenso donde se necesite trabajar con matrices recíprocas de preferencia satisfaciéndose las propiedades de consistencia.

También, y sirviendo como base los resultados obtenidos en el cuarto capítulo se abren nuevas líneas de investigación en las áreas tratadas, en donde incluir

estudios sobre todas las familias de operadores OWA. Por otro lado, también se consideran atractivas otras líneas de investigación centradas en su aplicación en problemas de microagregación o sistemas de recuperación y análisis de información agregada.

Así mismo ya se está trabajando en la construcción de nuevas familias de operadores sociales basados en sistemas de agrupamiento. Además, y en base a los buenos resultados obtenidos, se plantea su aplicación conjunta con redes neuronales, y otros operadores para la construcción de nuevos métodos de análisis borrosos.

Referencias

Allison, P.D. (2001). *Missing Data*. Sage University Papers Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, series no. 07-136, Thousand Oaks.

Amin G. R. (2007). Notes on properties of the OWA weights determination mode. *Computers & Industrial Engineering* 52. 533–538.

Arrow K. J. (1963). *Social Choice and Individual Values*. Wiley, New York.

Azcel, J., Alsina, C. (1983) Procedures for synthesizing ratio judgements. *Journal of Mathematical Psychology*. 27, 93-102.

Azcel, J., Alsina, C. (1987) Synthesizing judgements: A functional equations approach, *Mathematical Modelling*. 9, 311-320.

Barwise J. and Cooper R. (1981). Generalized Quantifiers in Natural Language. *Linguistic and Philosophy*, 4, 159-220.

Besoun J. (2004). El nuevo reto del director financiero: riesgo y beneficio. *Revista Estrategia Financiera. Anuario*.

Bonissone P. P. Decker K. S. (1986). Selecting uncertainty calculi and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity, en: L. H. Kanal and J. F. Lemmer, Eds., *Uncertainty in Artificial Intelligence*. North-Holland, Amsterdam. 217-247.

Budge, I. & Keman H. (1990). *Parties and Democracy. Coalition Formation and Government Functioning. Twenty States*, Oxford, Oxford University Press.

Carlsson C. Ehrenberg D. Eklund P. Fedrizzi M. Gustafsson, P. Lindholm P. Merkurjeva G. Riissanen T. Ventre A. G. S. (1992). Consensus in distributed soft environments, *European J. Oper. Res.* 61, 165-185.

Chambers, R. (2003). *Evaluation Criteria for Statistical Editing and Imputation. National Statistical Methodological Series, 28*, Office for National Statistics, London.

Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. (2000). The ordered weighted geometric operator: Properties and application. In: *Proc of 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*, Madrid, 985-991.

Cholewa W. (1985). Aggregation of fuzzy opinions: an axiomatic approach, *Fuzzy Sets and Systems* 17, 249-259.

Cross R.L. & Brodt S.E (2006). El valor del juicio intuitivo en la toma de decisiones. *Expansión/Harvard Deusto. Dirigir en la Incertidumbre.* 153-176.

Cutello V. Montero J. (1994). Hierarchies of intensity preference aggregations, *Internat. J. Approximate Reasoning* 10, 123-133.

Delgado D. Verdegay J. L. Vila M. A. (1993). On aggregation operations of linguistic labels, *Internat. J. Intelligent Systems* 8, 351-370.

Dubois D. and Koning J. L. (1991). Social choice axioms for fuzzy set aggregation, *Fuzzy Sets and Systems* 43, 257-274.

Durrant, G.B. (2005). Imputation Methods for Handling Item-Nonresponse in the Social Sciences, *A Methodological Review. NCRM Methods Review Papers Series.*

Egea A. (2004). Negociaciones payoffs y estabilidad de los gobiernos de coalición. *Estudios políticos*, 126, 91-112.

Fodor J. and Roubens M. (1994). *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht.

Gamson W. (1961). A theory of coalition formation. *American Sociological Review*, Vol. 26, 3, 373-382.

Gonzalez R. Woods R. (1993). *Digital Image Processing.* Addison-Wesley.

Government Statistical Service (GSS) (1996). Report of the Task Force on Imputation. Government Statistical Service Methodology Series, 3, London.

Grabisch M. (1995). Fuzzy integrals in multicriteria decision making, *Fuzzy Sets and Systems*, 69, 279-298.

Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J.I. (1996). Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Set and Systems* 79, 175-190.

Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. (2003). A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems* 18, 689-707.

Hinckley, B. (1976). *Coalitions and Time. Cross-disciplinary. Studies*, Beverly Hills/Londres, Sage Publications.

Ibrahim, J.G., Chen, M.H. Lipsitz, S.R. & Herring, A.H. (2005). Missing-Data Methods for Generalised Linear Models: A Comparative Review. *Journal of the American Statistical Association*, 100, 469, 332-346.

Jain R, Kasturi R., Schunck BG. (1995). *Machine Vision*. McGraw-Hill.

Jiang X., Huang J., WANG H. (2006). E-commerce performance evaluation model and its application. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)* Vol.46, 1, 1019-1024.

Kacprzyk J. (1986). Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Set and Systems*, 18, 105-118.

Kacprzyk J. (1990). Inductive learning from considerably erroneous examples with a specificity based stopping rule. *Proc. Int. Conference on Fuzzy Logic and Neural Networks. Iz.uka. Japan.* 819.

Kaufmann, A., Gil Aluja, J. (1986). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos en la gestión de empresas.* Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela.

Keenan E.L. and Westerstal D. (1997). Generalized quantifiers in Linguistic and Logics, in van Benthem J., ter Meulen A. (eds) *Handbook of logic and language*, Amsterdam: North-Holland, 837-893.

Kickert W.J.M. (1978). *Fuzzy Theories on Decision Making.* Nijhoff, Leiden.

Liu, X. W. (2006). Some properties of the weighted OWA operator. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 36, 1, 118-127.

Llamazares B. (2007). Choosing OWA operator weights in the field of Social Choice. *Information Sciences: an International Journal.* 177, 21, 4745-4756

Little, R.J.A. & Rubin, D.B. (1990). *The Analysis of Social Science Data with Missing Values.* *Sociological Methods and Research*, 18, 3, 292-326.

O'Hagan M. (1987). Fuzzy decision aids. *Twenty First Asilomar Conference on Signal, Systems and Computers, IEE Asilomar Conf. On Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA.*

O'Hagan M. (1988). Aggregating template rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic. Proc. 22nd Annual IEEE Asilomar Conf. On Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA.

Orlovsky S. A. (1978). Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation. *Fuzzy Sets and Systems* 1, 155-167.

Marimin. Umamo M., Hatono I., Tamura H.(1998). Linguistic Labels for Expressing Fuzzy Preference Relations in Fuzzy Group Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. Vol 28, 2, 205-218.

Mitchell H. B. Schaefer P.A. (2000). Multiple Priorities in an Induced Ordered Weighted Averaging Operator. *International Journal of Intelligent Systems*. Vol 15. 317-327.

Müller W. & Strom K. (2000). *Coalitions Governments in Western Europe*, Oxford University Press, Oxford.

Nash J. (1950). The Bargaining Problem. *Econometrica*. Vol 18, 155-162.

Nurmi H. & Kacprzyk J. (1991). On Fuzzy Tournaments and Their Solution Concepts in Group Decision Making. *European Journal of Operational Research*. 223-232.

Pasi G. & Yager R. (2002). Modeling Majority Opinion in Multi-Agent Decision Making. Proc Int Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, 1251-1257.

Pasi G. & Yager R. (2006). Modeling the Concept of Majority Opinion in Group Decision Making. *Recent Advancements of Fuzzy Sets: Theory and Practice. Information Sciences*, 176, 4, 390-414.

Pelaez J.I., Doña J.M. (2003a). Majority Additive-Ordered Weighting Averaging: A New Neat Ordered Weighting Averaging Operators Based on the Majority Process, *International Journal of Intelligent Systems* 18, 469-481.

Pelaez J.I., Doña J.M. (2003b). LAMA: A Linguistic Aggregation of Majority Additive Operator, *International Journal of Intelligent Systems* 18, 809-820.

Peláez J. I., Doña J. M., Mesas A. (2005). Majority multiplicative ordered weighting geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations. *Mathware and Soft Computing*. 12, 107-120.

Peláez J. I., Doña J. M. (2006). A majority model in group decision making using QMA-OWA operators. *Int. J. Intell. Syst.* 21, 193-208.

Peláez J.I., Doña J.M., Gil A.M. (2006) Application of Majority OWA operators in Strategic Valuation of Companies. *Proc Int. Eurofuse Workshop. New Trends in Preference Modelling*.

Peláez J.I., Doña J.M., Gómez-Ruiz J.A.(2007). Analysis of OWA Operators in Decision Making for Modelling the Majority Concept. *Applied Mathematics and Computation*, 186, 1263-1275.

Peláez J.I., Doña J.M., La Red D. L. (2008). Fuzzy Imputation Methods for DataBase Systems. Handbook of Research on Fuzzy Information Processing in Database. Hershey, PA, USA: Information Science Reference.

Raghunathan, T.E., Lepkowski, J.M. van Hoewyk M., Solenberger P.W. (2001). A Multivariate Technique for Multiply Imputing Missing Values using a Sequence of Regression Models. *Survey Methodology*, 27, 85-95.

Riker W. (1962). The theory of political coalitions. New Haven, Yale University Press.

Robertson G. Webb G. (1998). Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can. A K Peters Ltd. Portland, OR.

Rubin, D.B. (1987). Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys. New York, Chichester.

Ruiz R.J., Gil A.M. (2004). El valor de la empresa. Instituto superior de técnicas y prácticas bancarias. Madrid.

Schafer, J.L. & Graham, J.W. (2002): Missing Data: Our View of the State of the Art, *Psychological Methods*, 7, 2, 147-177.

Tanino T. (1988). Fuzzy Preference Relations in Group Decision Making. In: J. Kacprzyk and M. Roubens, Eds. Non-Conventional Preference Relations in Decision Making. Springer. Berling. 54-71.

Trucco E. Verri A. (1998). *Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*, Prentice Hall.

Von Neumann J. Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press. Vol 18.

Wu Z., Chen Y. (2007). The maximizing deviation method for group multiple attribute decision making under linguistic environment. *Fuzzy Sets and Systems* 158, 1608-1617

Xu ZS, Da QL. (2002). The ordered weighted geometric averaging operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 17, 709-716.

Yager R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics* 18, 183-190.

Yager R. (1991). Fuzzy quotient operators for fuzzy relational data bases. *Proc. Int. Fuzzy Engineering Symposium*. Yokohama. 289-296.

Yager R. (1992). OWA Neurons: A new class of fuzzy neurons. *Proc. Int. Joint on Neural Networks*. Vol. I. Baltimor. 226-231.

Yager R. (1993). Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 59 125-148.

Yager R. (1998a). Including Importances in OWA Aggregations Using Fuzzy Systems Modeling. *IEEE Transactions of Fuzzy Systems*. 6, 286-294.

Yager R. (1998b). New Modes of OWA Information Fusion. *International Journal of Intelligence Systems*. 13, 661-681.

Yager R. Filew D.P. (1992). Fuzzy logic controllers with flexible structures. *Proc. Second Int. Cont. on Fuzzy Sets and Neural Networks*. Izuka Japan. 317-320.

Yager R. (1996). Quantifier Guided Aggregation Using OWA Operators. *International Journal of Intelligent Systems*. 11, 49-73.

Yager R. Filev D. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, 29, 141-150.

Zadeh L.A. (1983). A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages. *Computing and Mathematics with Applications*. 9,149-184.